

## Stochastik

### Interaktive Aufgabe für die Übung 3

1. Wir betrachten das Laplace-Modell auf der Grundmenge  $\Omega := \{1, \dots, 8\}$  und die Ereignisse

- $A_1 = \{2, 4, 6, 8\}$
- $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A_3 = \{4, 5, 6, 7\}$ .

a) Berechne  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$  und  $\prod_{i=1}^3 P(A_i)$ .

b) Sind die Ereignisse  $A_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  unabhängig?

**Lösung:**

a)  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{4\}) = \frac{1}{8} = \prod_{i=1}^3 \frac{1}{2} = \prod_{i=1}^3 P(A_i)$ .

b) Es gilt

$$P(A_2 \cap A_3) = P(\{4\}) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A_2)P(A_3).$$

Daher sind die Ereignisse nicht paarweise unabhängig und folglich auch nicht unabhängig.

2. Sei  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit der folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x < 1, \\ 1/5, & \text{wenn } 1 \leq x < 4, \\ 3/4, & \text{wenn } 4 \leq x < 6, \\ 1, & \text{wenn } 6 \leq x. \end{cases}$$

a) Berechne die Wahrscheinlichkeitsfunktion

b) Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten

$$P[X = 6], \quad P[X = 5], \quad P[2 < X < 5.5], \quad P[0 \leq X < 4]$$

**Bitte wenden!**

- c) Berechne den Erwartungswert
- d) Berechne die Standardabweichung

**Lösung:**

a)

$$p(1) = 0.2, \quad p(4) = 0.55, \quad p(6) = 0.25$$

b)

$$P[X = 6] = 0.25, \quad P[X = 5] = 0, \quad P[2 < X < 5.5] = 0.55, \quad P[0 \leq X < 4] = 0.2$$

c)  $\mu_X = .2 \cdot 1 + 0.55 \cdot 4 + 0.25 \cdot 6 = 3.9$

d)  $E[X^2] = 0.2 \cdot 1 + 0.55 \cdot 16 + 0.25 \cdot 36 = 18,$   
 $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 18 - 15.21 = 2.79,$   
 $\sigma_X = \sqrt{2.79} \approx 1.6703$

3. Die Wahrscheinlichkeit unter den Nebenwirkungen einer bestimmten Impfung zu leiden beträgt 0.001. Wir betrachten eine Gruppe von 2'000 geimpften Personen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Person Nebenwirkungen erleidet?

**Lösung:** Sei  $X$  die Anzahl der geimpften Personen, die Nebenwirkungen erleiden.  $X$  ist  $\text{Bin}(n, p)$  verteilt, mit  $n = 2000$  und  $p = 0.001$ . Weiterhin gilt

$$P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - p(0) = 1 - 0.999^{2000} \approx 1 - 0.135 = 0.865$$