ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik

Interaktive Aufgabe für die Übung 4

1. Es seien $X \sim \text{Pois}(20)$ und $Y = X + 5$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründe.

a) $Y \sim \text{Pois}(25)$

b) $\text{Var}(Y) = 20$

b) $\mathbb{E}(X) = 25$

d) $\mathbb{E}(X/20) = 1$

e) $\text{Var}(X/20) = 1$

f) Sei $Z \sim \text{Bin}(10, 0.5)$. Dann ist

- $X + Z$ eine diskrete Zufallsvariable?
- $\mathbb{E}(X + Z) = 30$?

g) Sei $Z \sim \text{Pois}(\lambda)$, mit $\lambda \in 2\mathbb{N}$ und Z unabhängig von X. Dann gilt

- $X + Z$ ist Poisson verteilt?
- $\frac{1}{2}(X + Z)$ ist Poisson verteilt?

h) Bei der Poissonverteilung gilt allgemein dass

- der Parameter (λ) eine positive ganze Zahl ist?
- eine Zufallsvariable dieser Verteilung nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annehmen kann.

Lösung:

a) Falsch. Zum Beispiel ist $\text{Var}(Y) = \text{Var}(X + 5) = \text{Var}(X) = 20$. Also $Y \not\sim \text{Pois}(25)$. Oder auch $Y \geq 5$, also $P(Y = 0) = 0$.

b) Richtig. Siehe (i).

c) Falsch. Für Poisson-verteilte ZV ist der Erwartungswert gleich λ. Hier: $E(X) = 20$.

d) Richtig.

Bitte wenden!

e) Falsch. $\mathrm{Var}(X/20) = (\frac{1}{20})^2 \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{20}$

f)
- Richtig.
- Falsch. $\mathbb{E}(X+Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Z) = 20 + 5 = 25$

g)
- Richtig. Siehe Buch Seite 42.
- Falsch. $P(\frac{1}{2}(X+Z) = \frac{1}{2}) > 0$, jedoch gilt für jede Poisson-verteilte Zufallsvariable W, dass $P(W = \frac{1}{2}) = 0$ per Definition.

h)
- Falsch. Es muss nur gelten $\lambda > 0$.
- Richtig. Der Wertebereich ist $\mathbb{N}_0$

2. Der kleine Diego darf seine Eltern zu einer Party begleiten. Bei solchen Gelegenheiten möchte Diego jeweils so lange wie möglich wach bleiben. Sein Durchhaltevermögen (wach bleiben in Stunden ab Partybeginn um 20 Uhr) werde durch die Zufallsvariable T mit Verteilungsfunktion

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0, \\ 1 - \exp(-t/3) & \text{falls } t > 0, \end{cases}$$

beschrieben.

a) Prüfe nach, dass es sich bei F wirklich um eine Verteilungsfunktion handelt.

b) Hat F eine Dichte? Wenn ja, wie lautet diese?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Diego vor Mitternacht einschläft?

d) Um welche Uhrzeit beträgt die Wahrscheinlichkeit genau 50%, dass Diego bereits eingeschlafen ist?

Lösung:

a) F ist monoton wachsend, weil die Ableitung nicht-negativ ist (siehe auch **b)**). F ist (rechts-)stetig, weil exp (rechts-)stetig ist.
Ausserdem gilt $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$.

b) Die Dichte $f(t)$ erhält man durch ableiten der Verteilungsfunktion, es gilt also:

$$f(t) = \frac{dF}{dt}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ \frac{1}{3}\exp(-t/3) & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

c) $P(T \leq 4) = F(4) = 1 - \exp(-4/3) \approx 0.736$.

d) Wir bestimmen t, so dass $P(T \leq t) = F(t) = 0.5$ gilt. Auflösen nach t liefert $t = -3\ln(0.5) \approx 2.08 \approx 2$ Stunden 5 Minuten. Die gesuchte Uhrzeit ist also ca. 22.05 Uhr.