ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik

Interaktive Aufgabe für die Übung 10

Unterhalb einer Kläranlage wurden 16 unabhängige Wasserproben aus einem Fluss entnommen und jeweils deren Ammoniumkonzentration X_i (in μgNH_4-N/l) mit einem Messgerät bestimmt. Der Mittelwert der Proben ergab $\overline{x} = 204.2$.

Wir wollen nun wissen, ob mit diesem Experiment eine Überschreitung des Grenzwerts von 200 μgNH_4-N/l nachgewiesen werden kann (auf dem 5% Niveau).

a) Nimm an, die Standardabweichung der Messungen sei im Voraus aufgrund früherer Studien bekannt. Sie betrage 10 μgNH_4-N/l.

Führe unter dieser Annahme einen z-Test durch, um zu überprüfen, ob eine Grenzwertüberschreitung nachgewiesen werden kann.

Gib die Modellannahmen, H_0, H_A, den Verwerfungsbereich, den Wert der Teststatistik und das Testergebnis explizit an.

b) Wie wahrscheinlich ist es, dass man mit 16 unabhängigen Wasserproben eine Grenzwertüberschreitung nachweisen kann, wenn die wahre Ammoniumkonzentration tatsächlich über dem Grenzwert und zwar bei 205 μgNH_4-N/l liegt? **Bemerkung:** Bei der gesuchten Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die Macht des Tests am Wert 205.

c) Wie wahrscheinlich ist es, dass man mit 16 unabhängigen Wasserproben fälschlicherweise eine Grenzwertüberschreitung nachweist, obwohl die wahre Ammoniumkonzentration bei 200 μgNH_4-N/l liegt und den Grenzwert somit genau einhält?

Lösung:

a) Test durchführen:

Modellannahme: X_i: $i-$te Ammoniumbestimmung. X_i i.i.d. $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\sigma = 10$.

Nullhypothese H_0: $\mu = \mu_0 := 200$

Alternative H_A: $\mu > \mu_0$ (einseitig)

Teststatistik: $Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

Verwerfungsbereich: Aus der Normalverteilungstabelle: $K = \{z \geq z_{1-\alpha}\} = [1.64, \infty)$.

Wert der Teststatistik: $z = \frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{204.2-200}{\sigma/\sqrt{16}} = 1.68$

Testentscheid: $1.68 \in K$, also wird die Nullhypothese verworfen. Die Überschreitung des Grenzwertes ist auf dem 5%-Niveau signifikant.

b) Der Verwerfungsbereich $K = [1.64, \infty)$ entspricht dem Verwerfungsbereich $K = [204.1, \infty)$ auf der Skala von $\bar{X}$. Unter H_A mit $\mu = 205$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
P_{H_A}[\overline{X} > 204.1] &= P_{H_A}[\frac{\overline{X}-\mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{204.1-\mu_A}{\sigma/\sqrt{n}}] \\
&= P_{H_A}[\frac{\overline{X}-\mu_A}{\sigma/\sqrt{n}} > -0.36] \\
&= P_{H_A}[Z > -0.36].
\end{aligned}
$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist wegen der Symmetrie der Normalverteilung gleich

$$P[Z \leq 0.36] = 0.6406$$

wie aus der Tabelle entnommen werden kann. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit (die Macht des Testes) ist also ungefähr 64%.

c) Dies ist genau das Niveau des Testes und war als 5% vorgegeben.