

Stochastik

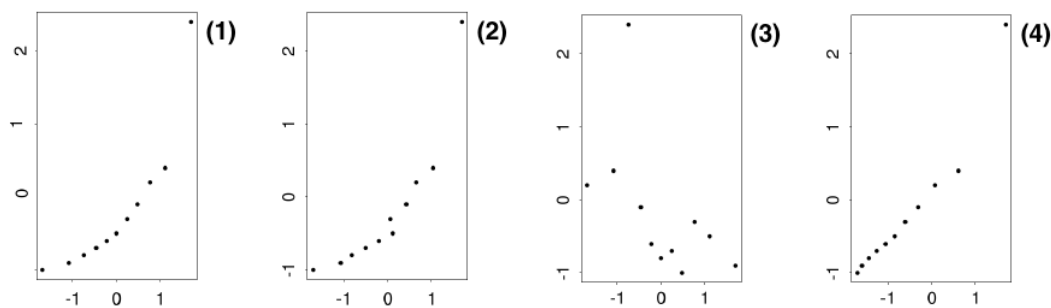
Interaktive Aufgabe für die Übung 12

1. Landwirt Daniel hat 1000 Braunviehkühe, von denen er zufällig 11 auswählt. Von diesen 11 Kühen misst er den Milchertrag morgens und abends im Abstand von 12 Stunden. Seine Melkmaschine misst für jede Kuh einzeln automatisch den Milchertrag in kg. Am 1. April 2000 ergaben sich die folgenden Werte:

Kuh	Anja	Helga	Gemsli	Rita	Orchidee	Olgi
morgens (M)	11.6	6.8	10.8	9.6	13.0	9.2
abends (A)	11.4	6.4	8.4	9.7	13.6	10.0
Differenz $M - A$	0.2	0.4	2.4	-0.1	-0.6	-0.8
Kuh	Belinda	Fiona	Nadia	Julia	Lama	
morgens (M)	7.0	12.2	10.2	8.2	8.0	
abends (A)	7.7	13.2	10.5	8.7	8.9	
Differenz $M - A$	-0.7	-1.0	-0.3	-0.5	-0.9	

Daniel vermutet, dass seine Kühe abends mehr Milch geben als morgens.

- a) Er überlegt sich, ob er mit den Differenzen einen t -Test zur Überprüfung seiner Vermutung durchführen soll. Dazu erzeugt er mit seinem Computer zunächst einen Q-Q-Plot.
- (i) Er erhält dabei eine der folgenden Graphiken. Welche? Begründe deine Antwort kurz.
- (ii) Ist ein t -Test angebracht? Begründe deine Antwort.



- b) Teste Daniels Vermutung mit einem Wilcoxon-Test zum 5%-Niveau. Gib dabei auch die Modellannahmen an sowie die Null- und die Alternativhypothese.

Tabelle der 5%-Verwerfungsbereiche beim Wilcoxon-Test:

N	$H_A: m \neq 0$	$H_A: m < 0$	$H_A: m > 0$
4	—	—	—
5	—	{0}	{15}
6	{0} \cup {21}	[0, 2]	[19, 21]
7	[0, 2] \cup [26, 28]	[0, 3]	[25, 28]
8	[0, 3] \cup [33, 36]	[0, 5]	[31, 36]
9	[0, 5] \cup [40, 45]	[0, 8]	[37, 45]
10	[0, 8] \cup [47, 55]	[0, 10]	[45, 55]
11	[0, 10] \cup [56, 66]	[0, 13]	[53, 66]
12	[0, 13] \cup [65, 78]	[0, 17]	[61, 78]
13	[0, 17] \cup [74, 91]	[0, 21]	[70, 91]
14	[0, 21] \cup [84, 105]	[0, 25]	[80, 105]
15	[0, 25] \cup [95, 120]	[0, 30]	[90, 120]

c) Daniel erinnert sich, dass die Kuh Gemsli, als sie am Abend gemolken wurde, von der Kuh Belinda getreten wurde, was ein möglicher Grund dafür sein könnte, dass Gemsli am Abend weniger Milch gab.

Hängt der Testentscheid aus b) von Gemslis Daten ab? Begründe die Antwort.

Lösung:

Das Auswählen kann man machen, indem man die Kühe von 1, ..., 1000 durchnummeriert und einen Computer zufällig 11 Zahlen in $\{1, \dots, 1000\}$ auswählen lässt.

- a) (i) Die Bilder 2 und 3 scheiden aus, weil die Punktefolge in Q-Q-Plots monoton steigt. Das 4-te Bild kommt nicht in Frage, weil die x -Werte nicht symmetrisch zur Null verteilt sind, wie es bei den Quantilen der Standardnormalverteilung der Fall ist. Folglich erhält Daniel das erste Bild als Q-Q-Plot.
- (ii) Die Punkte im ersten Bild liegen nicht gerade entlang der Diagonalen oder in deren Nähe. Dies liegt insbesondere am extremen Wert 2.4 von Gemsli. Dieser Ausreisser legt nahe, dass eine Normalverteilungsannahme und damit ein t -Test nicht angebracht sind.
- b) Die Differenzen D_1, \dots, D_{11} sind unabhängig und identisch verteilt mit einer zum (theoretischen) Median m symmetrischen stetigen Verteilung. Daniel möchte testen, ob $m < 0$ ist; er macht also einen linksseitigen Test mit $m_0 = 0$ und den Hypothesen

$$H_0 : m = m_0$$

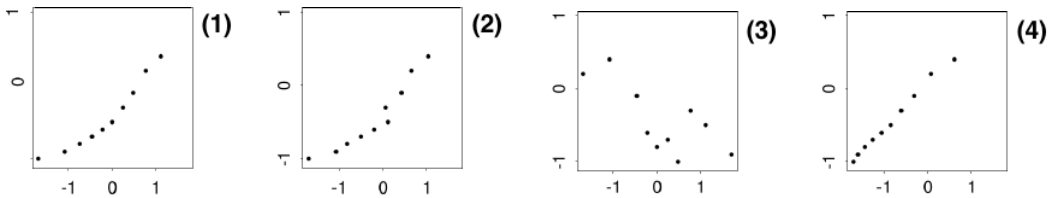
$$H_A : m < m_0.$$

Die Teststatistik ist die Rangsumme T_+ aller positiven Differenzen. Laut Tabelle ergibt sich für $N = 11$ ein Verwerfungsbereich von $VB_{5\%} = \{0, \dots, 13\}$.

Die Realisierung von T_+ ist $t_+ = 2 + 4 + 11 = 17 \notin VB_{5\%}$; also kann H_0 nicht verworfen werden. Dieser Test entdeckt also auf dem 5%-Niveau keinen Unterschied zwischen der abendlichen und der morgendlichen Milchmenge. (Bem.: Der P -Wert ist 0.0874.)

Kuh	Anja	Helga	Gemsli	Rita	Orchidee	Olgi
morgens (M)	11.6	6.8	10.8	9.6	13.0	9.2
abends (A)	11.4	6.4	8.4	9.7	13.6	10.0
Differenz $M - A$	0.2	0.4	2.4	-0.1	-0.6	-0.8
Rang	2	4	11	1	6	8
Kuh	Belinda	Fiona	Nadia	Julia	Lama	
morgens (M)	7.0	12.2	10.2	8.2	8.0	
abends (A)	7.7	13.2	10.5	8.7	8.9	
Differenz $M - A$	-0.7	-1.0	-0.3	-0.5	-0.9	
Rang	7	10	3	5	9	

- c) Ja, Gemsli's Daten beeinflussen das Testergebnis ganz wesentlich. Lässt man z.B. die Daten von Gemsli ganz weg, weil sie anscheinend verfälscht sind, so erhält man mit den übrigen 10 Kühen einen Wert $t_+ = 6$, was eindeutig im neuen (jetzt $N = 10$) Verwerfungsbereich $\{0, 1, \dots, 10\}$ liegt. (Bem.: Der P -Wert ist 0.01365.)



2. Betrachte folgende allgemeine Aussagen zu statistischen Tests und Vertrauensintervallen. Sind sie richtig oder falsch? Gib eine kurze Begründung an.

- Anhand des p -Werts können wir immer den Testentscheid ablesen.
- Statistische Signifikanz ist immer mit fachlicher Relevanz gleichzusetzen.
- Mit dem Signifikanzniveau wird der Fehler 1. Art kontrolliert.
- Je mehr Beobachtungen wir haben, desto kleiner wird der Fehler 1. Art, wenn wir einen Test auf dem 5%-Niveau durchführen.
- Je mehr Beobachtungen wir haben, desto wahrscheinlicher ist es, dass wir die Nullhypothese auf dem 5%-Niveau verwerfen, wenn sie in Tat und Wahrheit nicht stimmt.

Lösung:

- Richtig. Wenn der p -Wert kleiner ist als das Signifikanzniveau, wird die Nullhypothese verworfen.
- Falsch. Es gibt durchaus Situationen, bei denen statistische Signifikanz vorliegt aber keine fachliche Relevanz.
- Richtig. Gemäss Definition.
- Falsch. Wenn wir auf dem 5%-Niveau testen, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art immer maximal 5%.
- Richtig. Je mehr Beobachtungen wir haben, desto grösser wird die Macht des Tests.