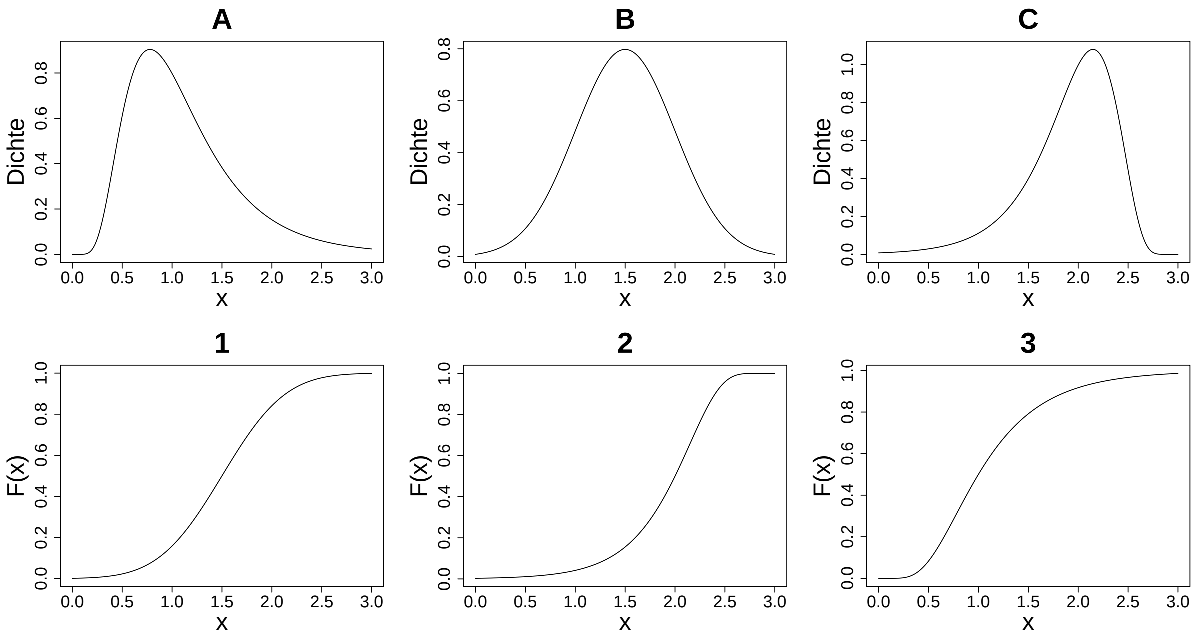
ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik

Interaktive Aufgabe für die Übung 5

1. Betrachten Sie folgende Darstellung.



Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) Die richtige Zuordnung zwischen Dichte und kumulativer Verteilungsfunktion F ist: A3, B1, C2.

b) Für eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte in Plot C gilt, dass $P[X = 2] > P[X = 1]$.

c) Für eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichte in Plot B gilt, dass der Erwartungswert bei 1.5 liegt.

d) Die kumulative Verteilungsfunktion kann bei stetigen Verteilungen auch einmal (strikt) grösser als 1 sein.

Lösung:

a) Richtig.

b) Falsch. Für stetige Verteilungen gilt: $P[X = 2] = P[X = 1] = 0$.

c) Richtig. Die Dichte ist symmetrisch um 1.5.

d) Falsch. Für eine kumulative Verteilungsfunktion $F(x)$ gilt per Definition: $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. Ein Zufallsgenerator für die uniforme Verteilung auf $[0, 1]$ liefert die folgenden fünf Werte:

$$0.353 \qquad 0.101 \qquad 0.455 \qquad 0.918 \qquad 0.285.$$

Generiere daraus fünf Werte einer

a) Uni $[-4, 25]$-verteilten Zufallsvariablen.

b) Exp (2)-verteilten Zufallsvariablen.

c) $\mathcal{N}(-2, 5^2)$-verteilten Zufallsvariablen (*Hinweis:* Die Quantile der Standardnormalverteilung kann man aus Tabelle A.3 ablesen).

Lösung:

Die gegebenen fünf Werte interpretieren wir als fünf Realisierungen einer auf $[0, 1]$ uniform verteilten Zufallsvariable U, also $U \sim$ Uni $[0, 1]$. Für eine beliebige Verteilungsfunktion F ist $X = F^{-1}(U)$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F (siehe Kapitel 2.3.7 im Skript)

Dabei ist F^{-1} ist die Umkehrfunktion von F.

a) Die Verteilungsfunktion von Uni $[-4, 25]$ ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 4, \\ \frac{1}{29}(x+4) & -4 \leq x \leq 25, \\ 1 & x > 25. \end{cases}$$

(siehe Kapitel 2.3.3 im Skript)
Die Umkehrfunktion von F wird berechnet durch lösen von

$$F(x) = u$$

für $u \in (0, 1)$ nach x:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{29}(x+4) = u \\ \Leftrightarrow \qquad & x + 4 = 29u \\ \Leftrightarrow \qquad & x = 29u - 4. \end{aligned}$$

Also gilt $F^{-1}(u) = 29u - 4$ für $u \in (0, 1)$. D. h. $X = 29U - 4$ ist Uni $[-4, 25]$-verteilt, die gesuchten Realisierungen sind somit

$$6.24 \qquad -1.07 \qquad 9.2 \qquad 22.62 \qquad 4.27.$$

b) Die Verteilungsfunktion einer Exp (2)-verteilten Zufallsvariable ist durch

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.
Löse also

$$F(x) = u$$

für die $u \in (0,1)$ nach x:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2x} &= u \\ \Leftrightarrow \qquad e^{-2x} &= 1 - u \\ \Leftrightarrow \qquad -2x &= \log(1-u) \\ \Leftrightarrow \qquad x &= \frac{-1}{2}\log(1-u). \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist also $F^{-1}(u) = \frac{-1}{2}\log(1-u)$.
D. h. $X = \frac{-1}{2}\log(1-U)$ ist $\mathrm{Exp}\,(2)$-verteilt. Die entsprechenden Realisierungen sind:

$$0.218 \qquad 0.053 \qquad 0.303 \qquad 1.25 \qquad 0.167$$

c) Die Verteilungsfunktion von $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ ist gegeben durch $F_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$. Löse also

$$F_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = u$$

für die $u \in (0,1)$ nach x:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) &= u \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{x-\mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(u) \\ \Leftrightarrow \qquad x &= \sigma\Phi^{-1}(u) + \mu. \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist also$F^{-1}_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(u) = \Phi^{-1}(u)\sigma + \mu$.
D. h. $X = \Phi^{-1}(U)\sigma + \mu$ ist $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$-verteilt. Die Quantile $\Phi^{-1}(u)$ der Standardnormalverteilung lesen wir aus der Tabelle für die Standardnormalverteilung aus:
$\Phi^{-1}(0.353) = -0.38, \Phi^{-1}(0.101) = -1.28, \Phi^{-1}(0.455) = -0.11, \Phi^{-1}(0.918) = 1.39, \Phi^{-1}(0.285) = -0.57$.
Mit $x = \Phi^{-1}(u)\sigma + \mu$, wobei $\mu = 2$ und $\sigma = 5$, ergeben sich daraus die gesuchten Realisierungen:

$$-3.9 \qquad -8.4 \qquad -2.55 \qquad 4.95 \qquad -4.85.$$