ETH Zürich HS 2019
RW, D-MATL, D-MAVT
Dr. Christoph Czichowsky

Koordinator
Florian Krach

Stochastik

Interaktive Aufgabe für die Übung 7

1. Es seien X und Y unabhängige, $\mathcal{N}(0,1)$-verteilte Zufallsvariablen. Wir betrachten die Zufallsvariable Z, welche definiert ist als

$$Z := X \operatorname{sign}(Y) = \begin{cases} X & \text{falls } Y > 0, \\ -X & \text{falls } Y \leq 0. \end{cases}$$

a) Bestimme die Verteilung von Z.

b) Berechne die Korrelation von X und Z.

c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit $P(X + Z = 0)$.

d) Sind X und Z unabhängig? Begründe deine Antwort durch ein präzises mathematisches Argument.

Lösung:

a) Verteilungsfunktion von Z:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(Z \leq z | Y > 0) P(Y > 0) + P(Z \leq z | Y \leq 0) P(Y \leq 0) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} P(X \leq z | Y > 0) + \frac{1}{2} P(-X \leq z | Y \leq 0) \\ &\overset{(**)}{=} \frac{1}{2} P(X \leq z) + \frac{1}{2} P(X \geq -z) = \frac{1}{2} \left(\Phi(z) + 1 - \Phi(-z) \right) \\ &= \Phi(z), \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Also ist Z ebenfalls $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt.
(*) falls $Y > 0$ ist, so ist $Z = X$ und falls $Y \leq 0$ ist, so ist $Z = -X$.
(**) da X und Y unabhängig sind.

b) Mit $\operatorname{Corr}(X,Z) = \frac{\operatorname{Cov}(X,Z)}{\sigma_X \, \sigma_Z}$ folgt aus

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X,Z) &= E(XZ) - E(X)E(Z) = E(XZ) = E(\operatorname{sign}(Y) \, X^2) \\ &= E(\operatorname{sign}(Y)) \, E(X^2) = 0, \end{aligned}$$

dass die Korrelation von X und Z gleich 0 ist.

Bitte wenden!

c) $P(X+Z=0) = P(Z=-X) = P(Y \leq 0) = \frac{1}{2}$.

d) Nein, denn sonst wäre $X + Z \sim \mathcal{N}(0,2)$ und damit $P(X+Z=0) = 0$, im Widerspruch zu **b)**.
Alternative Begründung: wenn X und Z unabhängig wären, müsste für alle A und B in $\mathbb{R}$ gelten

$$P(X \in A, Z \in B) = P(X \in A)P(Z \in B),$$

aber z.B. gilt für $A = [-1,1]$ und $B = [2,\infty)$

$$P(X \in A, Z \in B) = 0 < P(X \in A)P(Z \in B).$$

2. Auf einen LKW werden 500 Zementsäcke aufgeladen, wobei die Masse eines Zementsackes gleichverteilt zwischen $18kg$ und $22kg$ ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der LKW seine maximal zulässige Nutzlast von $10.5t$ überschreitet?

Tipp: Für $i = 1, \ldots, 500$ sei X_i jene Zufallsvariable, welche die Masse des i-ten Zementsackes repräsentiert. Triff geeignete Annahmen an die X_i und verwende den Zentralen Grenzwertsatz.

Lösung: Für $i = 1, \ldots, 500$ sei X_i jene Zufallsvariable, welche die Masse des i-ten Zementsackes repräsentiert. Für alle $i = 1, \ldots, 500$ gilt $X_i \sim$ Unif$(18, 22)$. Daher ist $E[X_i] = 20$ sowie $Var(X_i) = \frac{(22-18)^2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$.
Da alle X_i unabhängig und identisch Unif$(18, 22)$-verteilt sind, ist die Zufallsvariable $Y := \sum_{i=1}^{500} X_i$ laut dem zentralen Grenzwertsatz approximativ $\mathcal{N}(\underbrace{500 \cdot 20}_{=\mu_Y}, \underbrace{500\frac{4}{3}}_{=\sigma_Y^2})$-verteilt, woraus sich

$$P(Y \leq 10500) = \Phi\left(\frac{10500 - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) = \Phi\left(\frac{10500 - 500 \cdot 20}{\sqrt{\frac{2000}{3}}}\right) = \Phi(19.4)$$

ergibt.

Der grösste Wert, der in der Tabelle für die Standardnormalverteilung noch ersichtlich ist, ist 3.49. Wir schätzen daher einfach

$$P(Y > 10500) = 1 - P(Y \leq 10500) = 1 - \Phi(19.4) < 1 - \Phi(3.49) = 1 - 0.9998 = 0.0002\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das zulässige Gesamtgewicht überschritten wird, ist also kleiner als 0.2 Promille, also verschwindend klein.