Diskrete Verteilungen

Bernoulli-Verteilung: $X \sim$ Bernoulli(p)

Symbol für «verteilt wie»

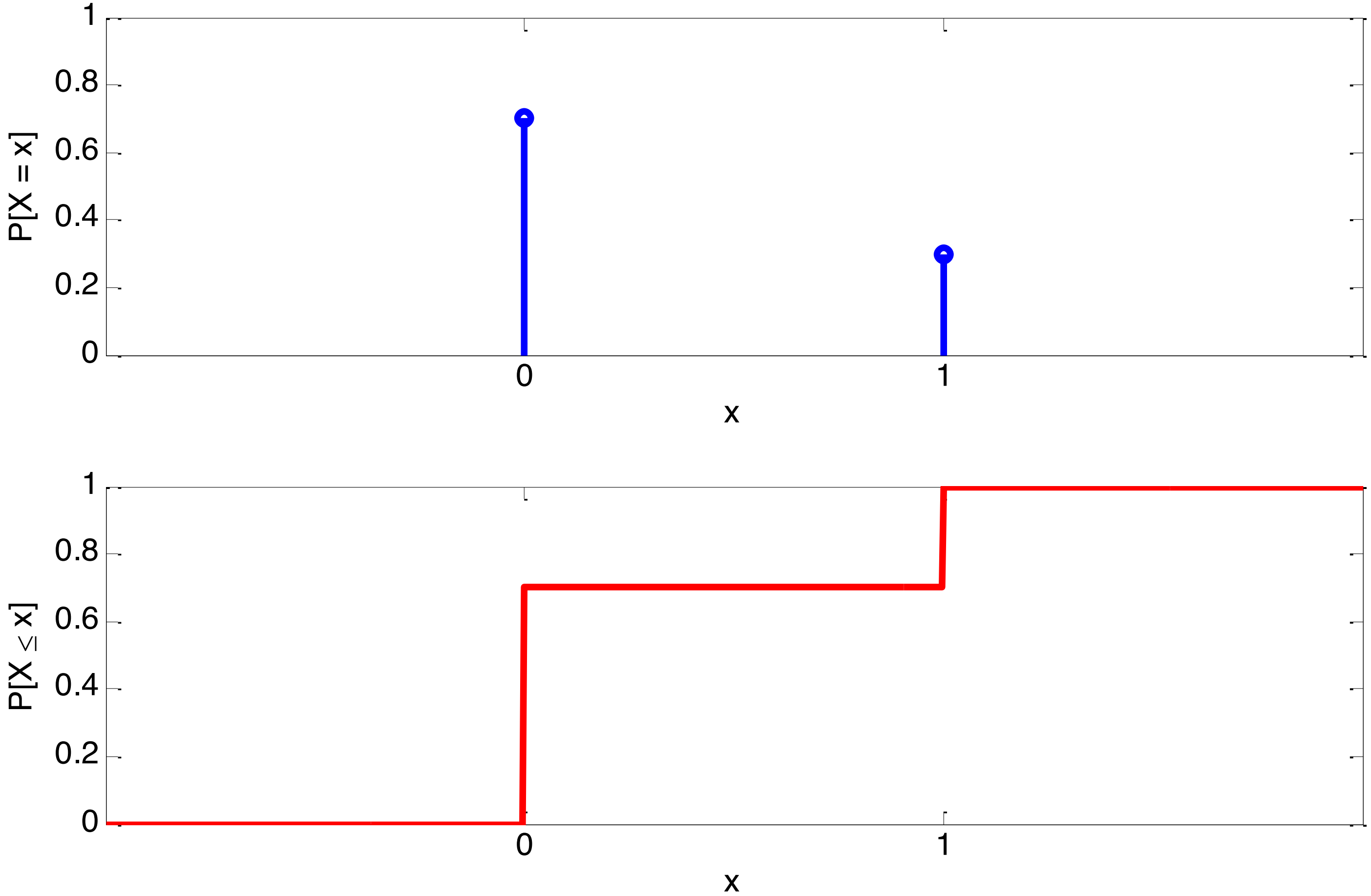
- «Experiment» mit **zwei** Ausgängen: «Erfolg» ($X = 1$) oder «Misserfolg» ($X = 0$). Die Erfolgswahrscheinlichkeit sei p.

- Wertebereich: $W = \{0,1\}$

- Wa’keitsfunktion:
  $P(X = 0) = 1 - p; \quad P(X = 1) = p$

- Erwartungswert / Varianz (nachrechnen!)
  $E(X) = p$
  $Var(X) = p(1 - p)$

Bernoulli-Verteilung $(p = 0.3)$



Bernoulli-Verteilung: Beispiele

«Experiment» und «Erfolg» können vieles bedeuten:

- Erdbeben tritt ein ($X = 1$) vs. Erdbeben tritt nicht ein ($X = 0$).
- Qualitätsanforderung erfüllt ($X = 1$) vs. Qualitätsanforderung nicht erfüllt ($X = 0$) (bzw. umgekehrt).
- Gesund (X=1) vs. krank (X=0).
- Usw…

Also immer wenn etwas **zwei mögliche Ausgänge** hat, kann man die Bernoulli-Verteilung verwenden.

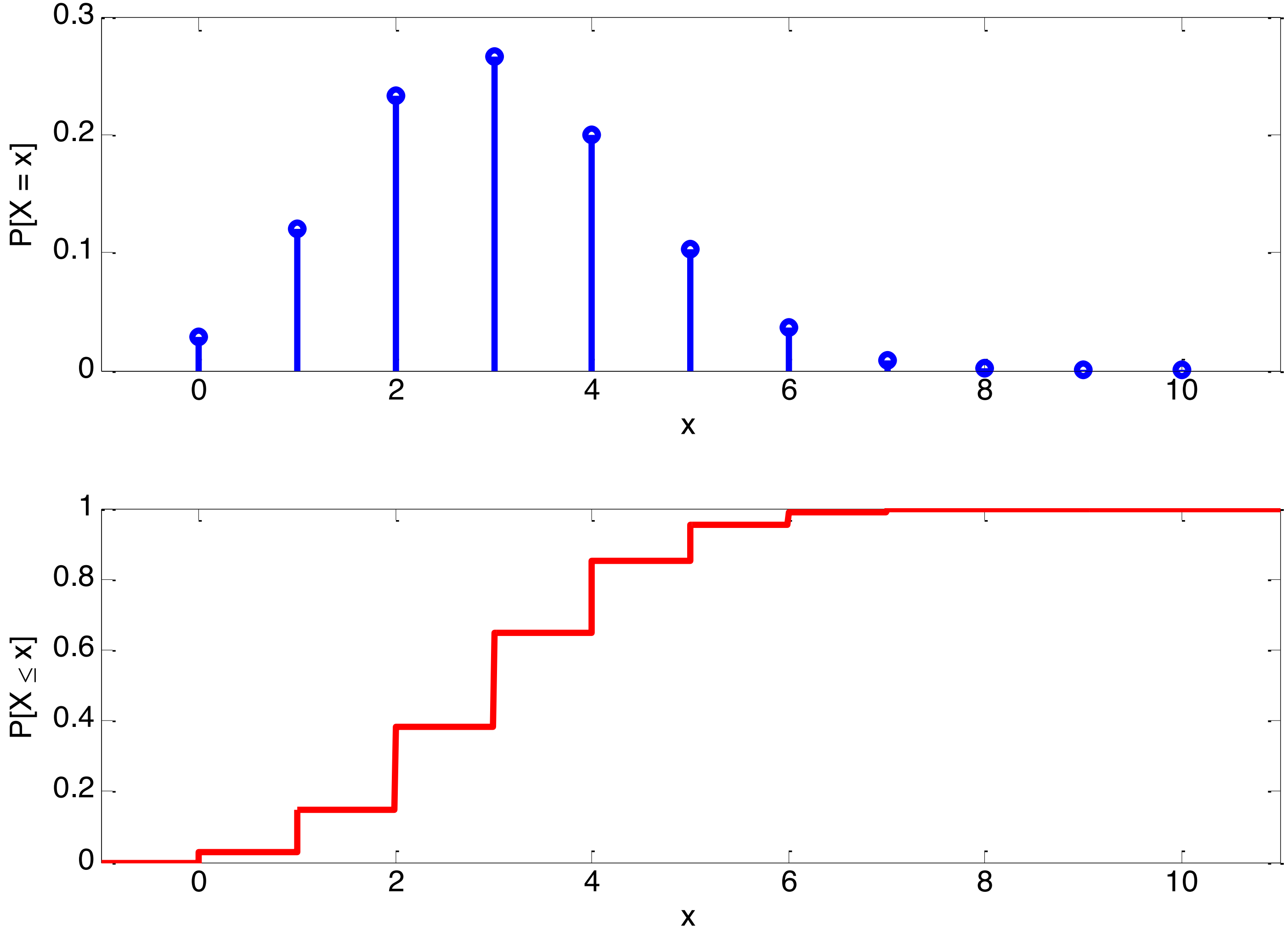
Binomialkoeffizient

- Wir werden jetzt n unabhängige Experimente betrachten und wir zählen die Anzahl Erfolge.
- Wieviel Möglichkeiten gibt es für k Erfolge in n Experimenten?
- Dies ist gegeben durch den **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Beispiel: Anzahl Möglichkeiten für 1 Erfolg in 5 Experimenten:
  10000, 01000, 00100, 00010, 00001 und
  $\binom{5}{1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 5$
- Beispiel: Anzahl Möglichkeiten für 2 Erfolge in 4 Experimenten:
  1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011 und
  $\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

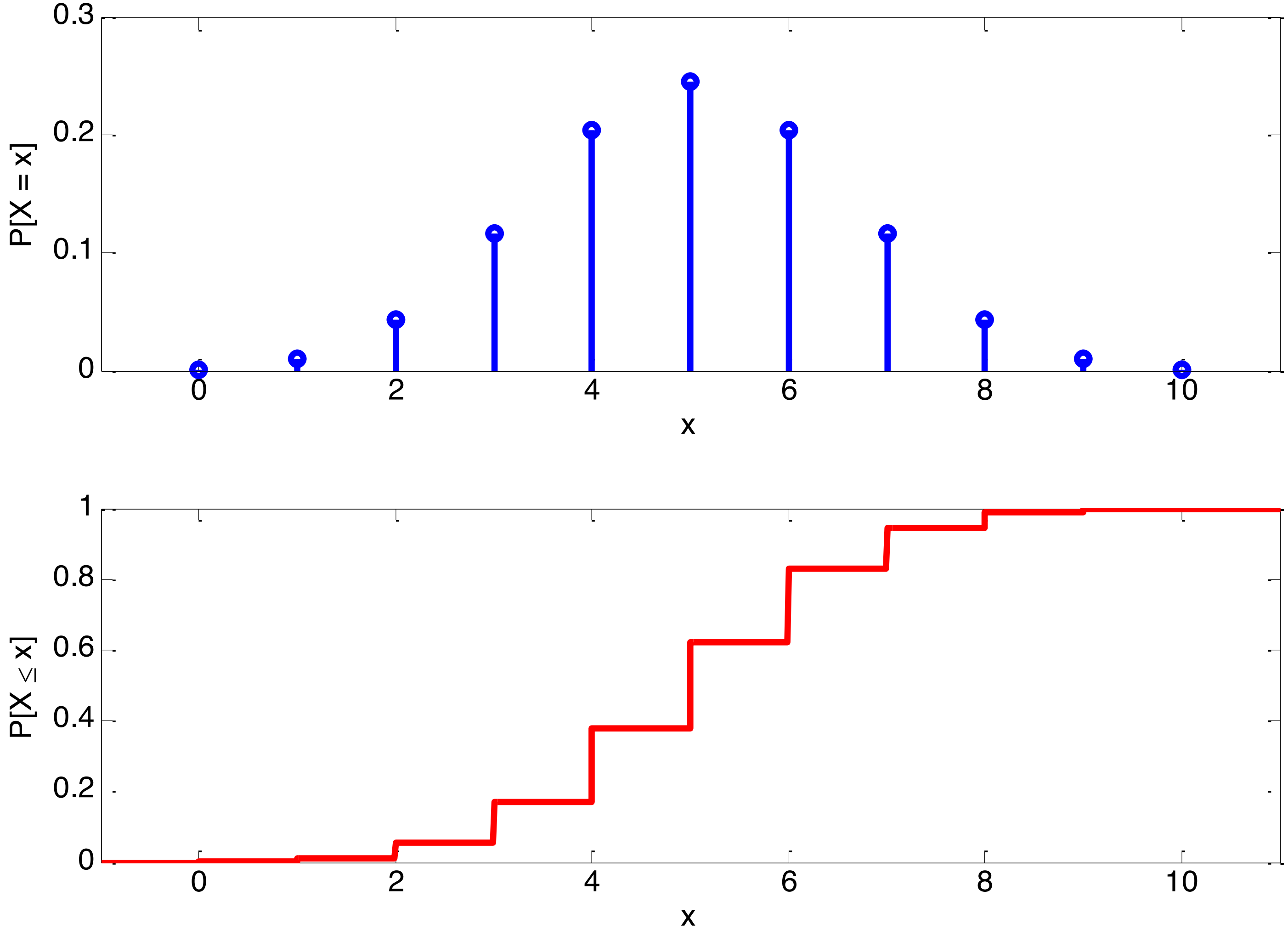
Binomialverteilung: $\boldsymbol{X \sim Bin(n, p)}$

- X sei die Summe von n **unabhängigen** Bernoulli verteilten Zufallsvariablen mit **gleicher** Erfolgswahrscheinlichkeit p.
- D.h. X zählt die **Anzahl «Erfolge» in $\boldsymbol{n}$ unabhängigen «Versuchen»** (mit individueller Erfolgsw'keit p).
- Wertebereich: $W = \{0, 1, \dots, n\}$
- Wa'keitsfunktion:
  $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ für $x \in W$ (siehe Kapitel C.1 im Skript)
- Erwartungswert und Varianz:
  $E(X) = np$
  $Var(X) = np(1-p)$

Binomialverteilung $(n = 10, p = 0.3)$



Binomialverteilung $(n = 10, p = 0.5)$



Binomialverteilung: Beispiel

- Sei $p = 0.15$ die W'keit, dass eine Betonprobe mangelhaft ist.
  («Erfolg» = mangelhaft)

- Sei X die Anzahl mangelhafter Proben von insgesamt 10 (unabhängigen) Proben.

- X ist also Binomial-verteilt: $X \sim Bin(n, p)$ mit $n = 10$ und $p = 0.15$.

- Damit können wir diverse Sachen berechnen.

Binomialverteilung: Beispiel

- Was ist die W'keit, dass von 10 Proben **keine** mangelhaft ist?

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10} = (1-p)^{10} = 0.85^{10}$$

- Was ist die W'keit, dass von 10 Proben **mindestens eine** mangelhaft ist?

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.85^{10}$$

- Was ist die W'keit, dass von 10 Proben **genau zwei** mangelhaft sind?

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} p^2 (1-p)^8 = 45 \cdot 0.15^2 \cdot 0.85^8$$

Binomialverteilung: Bemerkungen

- Die «Anzahl Versuche» n ist in der Regel aus dem Kontext vorgegeben.
- Die W'keit p ist dagegen ein **Parameter**, der in der Regel **unbekannt** ist (bis jetzt haben wir einfach entsprechende Annahmen getroffen).
- Typischerweise will man p aus Daten schätzen (siehe später).
- Bis auf Weiteres tun wir so, als ob wir p kennen würden.

Geometrische Verteilung: $X \sim \text{Geom}(p)$

- X sei die **Anzahl Wiederholungen** von unabhängigen Bernoulli(p) Experimenten **bis zum ersten Erfolg**.

- Beispiel: Werfe eine Münze so lange, bis zum **ersten Mal** Zahl erscheint und notiere die Anzahl Würfe.

- Wertebereich: $W = \{1, 2, 3, \dots\}$ (**unbeschränkt!**)

- Es gilt $P(X = x) = \underbrace{(1-p)^{x-1}}_{x-1\text{ Misserfolge}} \underbrace{p}_{1\text{ Erfolg}}$ für $x \in W$.

- Bemerkung: Wir brauchen jetzt keinen Binomialkoeffizient, weil die Misserfolge alle bevor dem Erfolg passieren müssen.

Geometrische Verteilung

- Erwartungswert und Varianz

  $E(X) = 1/p;$

  $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

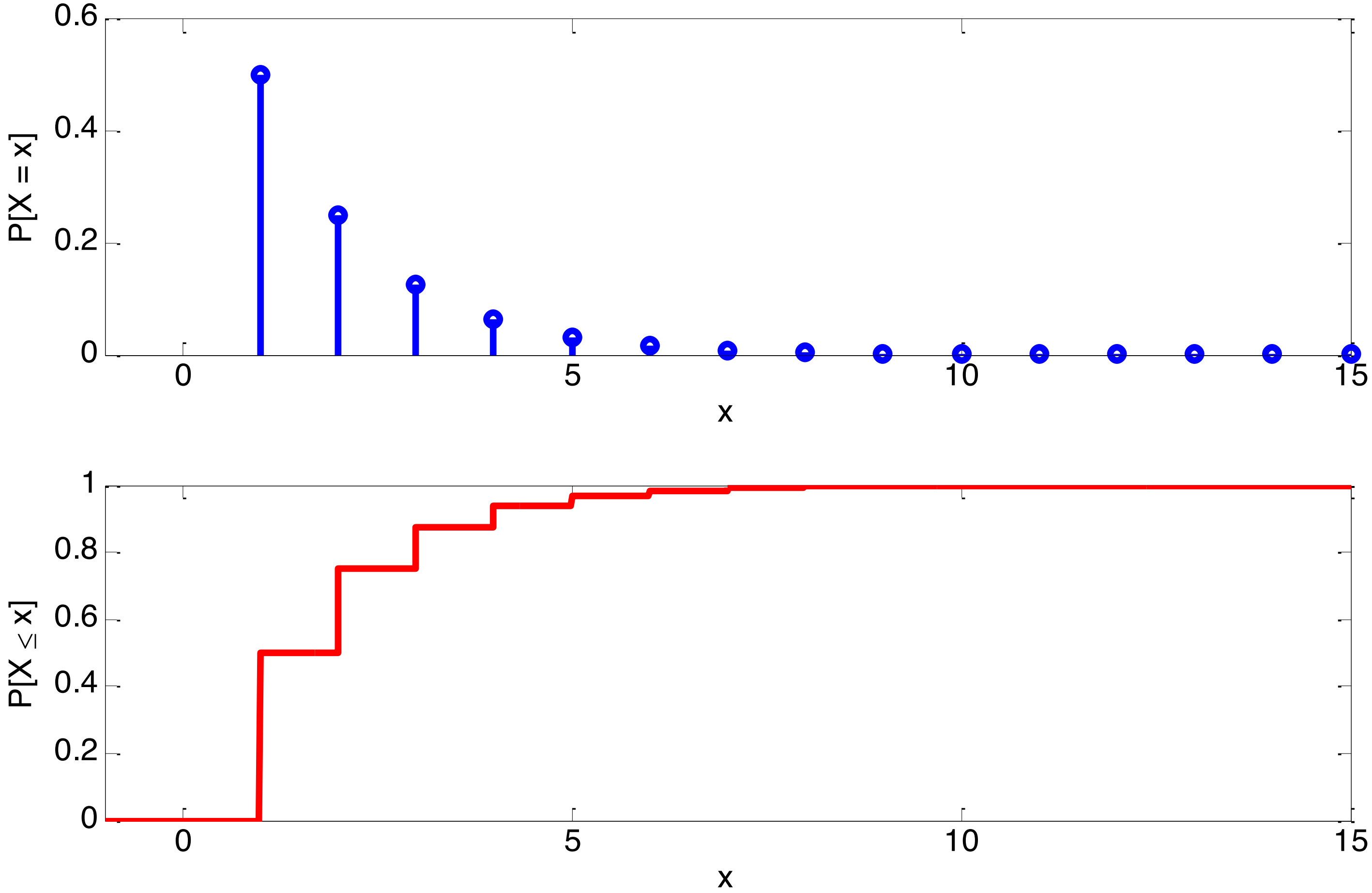
- Erwartungswert entspricht der **mittleren Wartezeit bis zum ersten «Erfolg»**, wird auch als **Wiederkehrperiode** bezeichnet.

- Die kumulative Verteilungsfunktion hat eine einfache Form:

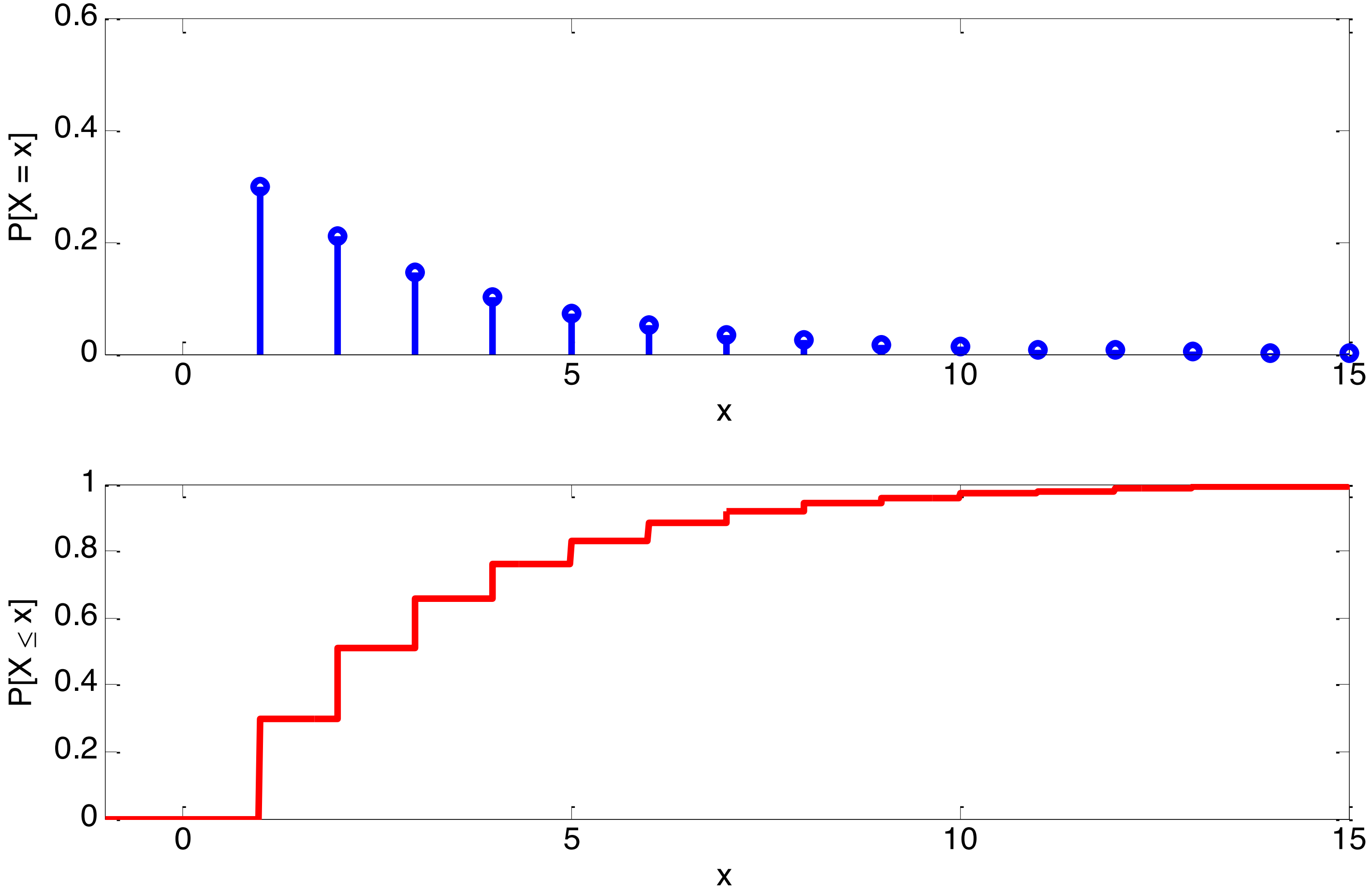
  $F(x) = \sum_{i=1}^{x}(1-p)^{i-1}p = 1-(1-p)^{x}$ für $x \in W$.

  (geometrische Reihe)

Geometrische Verteilung $(p = 0.5)$



Geometrische Verteilung $(p = 0.3)$



Poisson-Verteilung: $\boldsymbol{X \sim \mathrm{Pois}(\lambda), \lambda > 0}$

- Anwendung: Modellierung von (**unbeschränkten**) **Anzahlen**.

- Wertebereich: $W = \{0, 1, 2, \dots\}$ (**unbeschränkt**)

- Wa'keitsfunktion:

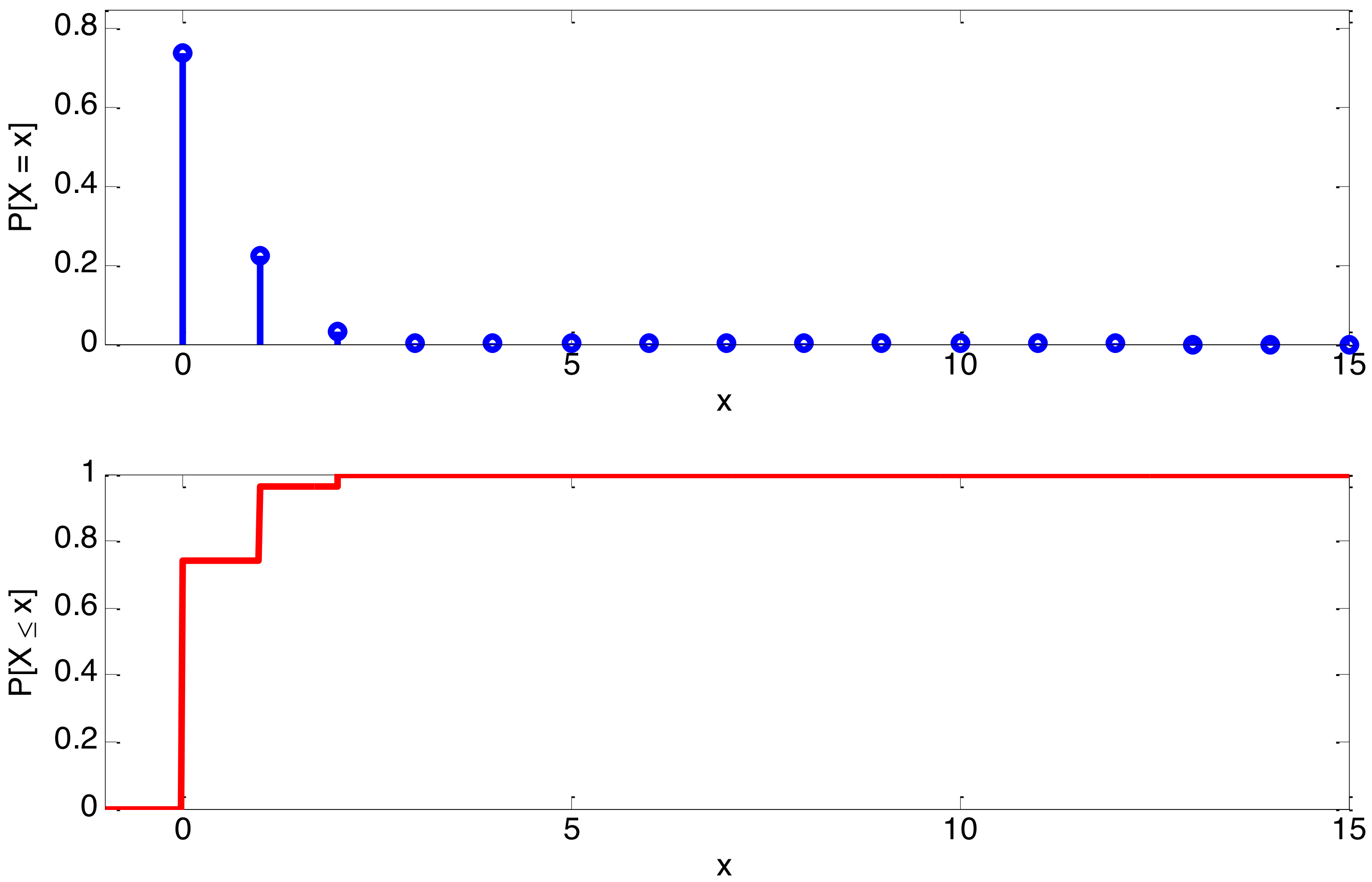
  $P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ für $x \in W$.

- Erwartungswert / Varianz (hier identisch!)

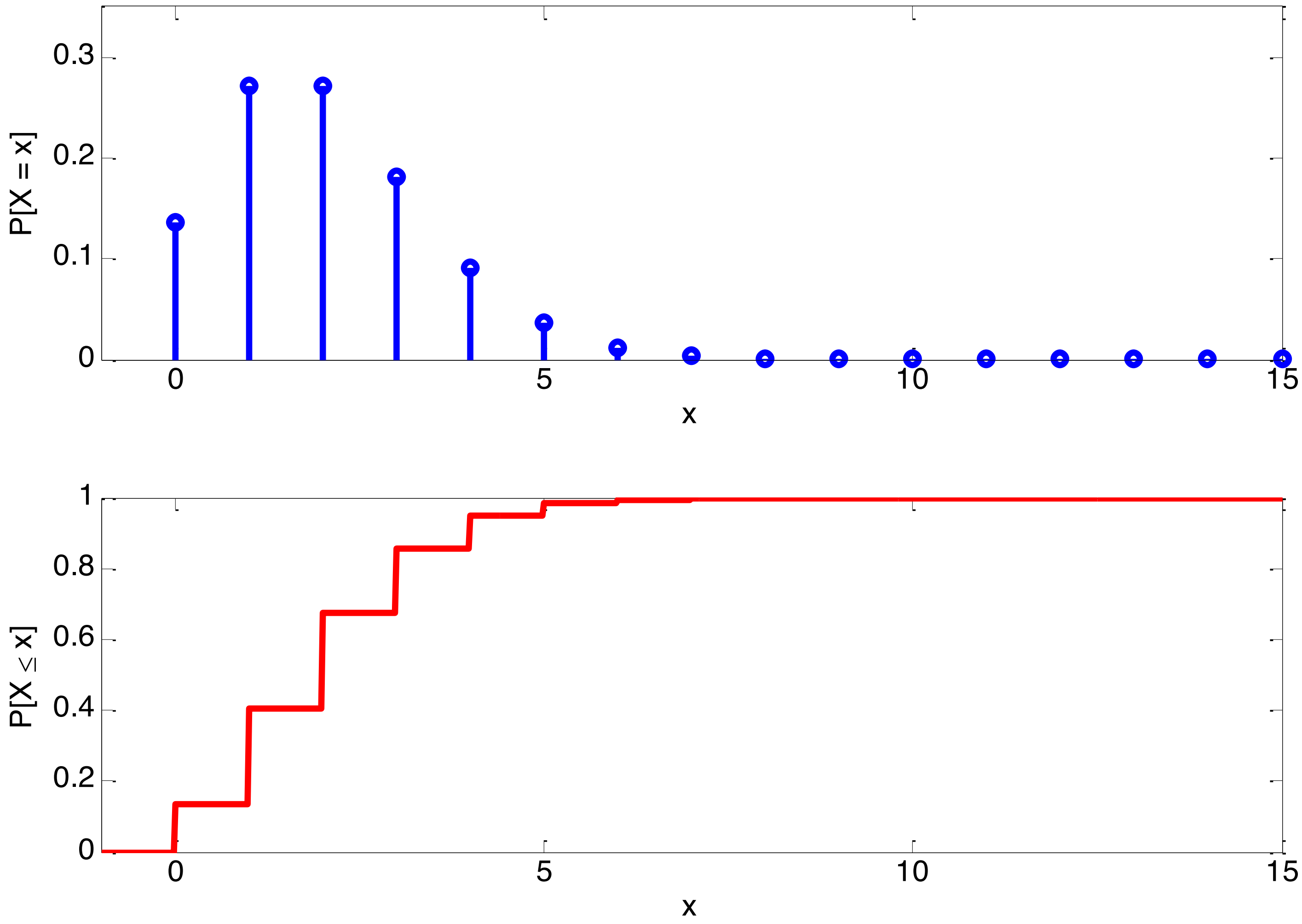
  $E(X) = \lambda$

  $Var(X) = \lambda$

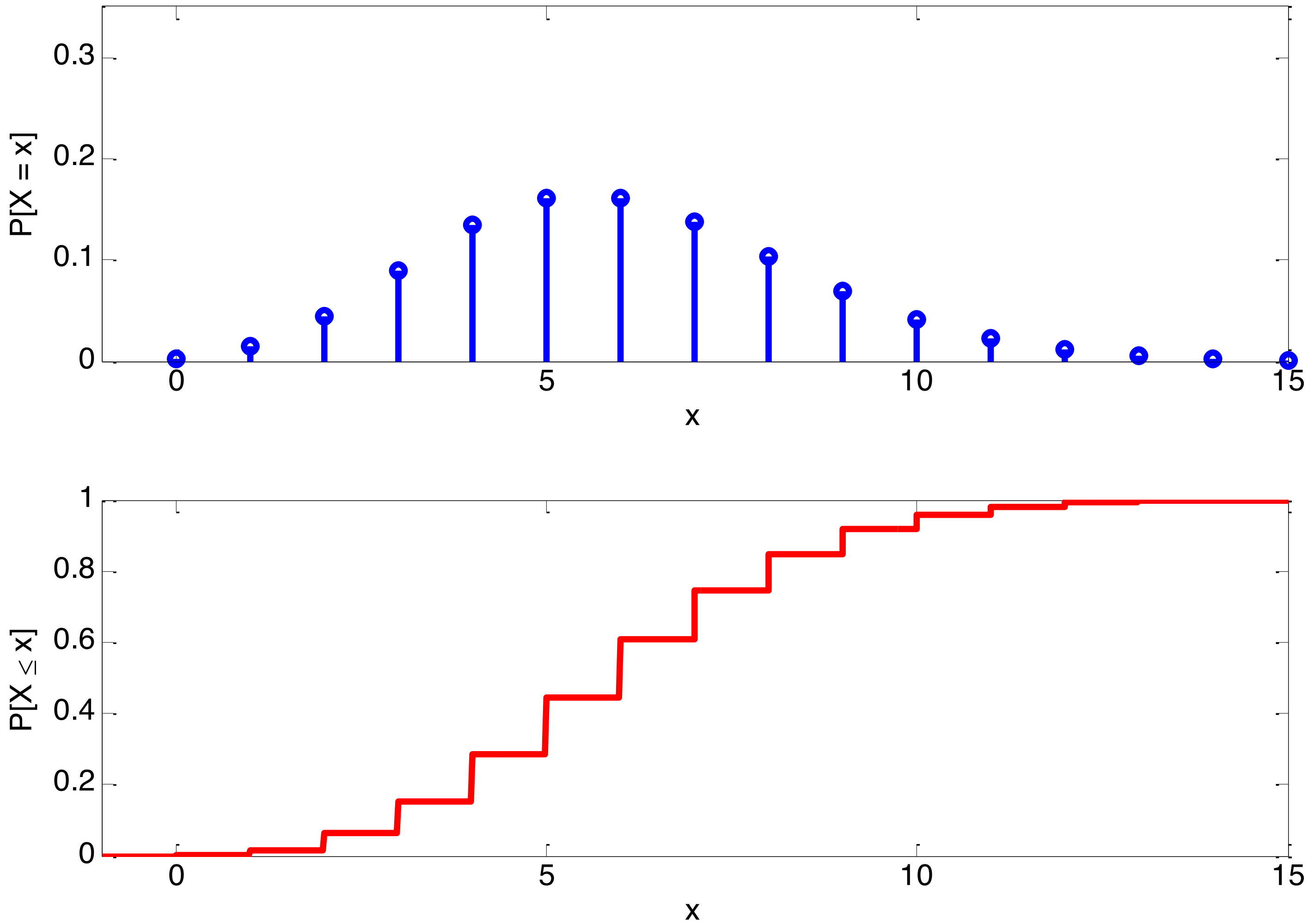
Poisson-Verteilung $(\lambda = 0.3)$



Poisson-Verteilung $(\lambda = 2)$



Poisson-Verteilung $(\lambda = 6)$



Poisson-Verteilung: Eigenschaften

- Es gilt: $Pois(\lambda) \approx Bin(n, p)$, für n gross, p klein und $np = \lambda$.

  D.h. die Poisson-Verteilung kann interpretiert werden als Verteilung der Anzahl Ereignisse für seltene Ereignisse (p klein) bei vielen (n gross) unabhängigen Versuchen.

- Ist $X \sim Pois(\lambda_1), Y \sim Pois(\lambda_2)$, **unabhängig**, dann ist

$$X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Poisson-Verteilung: Beispiel

- Ein Callcenter wird im Schnitt alle 12 Sekunden angerufen. D.h. wir haben **im Schnitt 5 Anrufe pro Minute**.
- Die Anzahl Anrufe pro Minute modellieren wir mit der Zufallsvariablen X, für die wir eine Poissonverteilung annehmen (**viele** Leute könnten potentiell anrufen, jeder hat jedoch eine **tiefe W'keit** dies zu tun):
- Was ist die W'keit, dass innerhalb einer Minute **keine** Anrufe eingehen?

$$X \sim Pois(5); \quad (weil\ E(X) = 5)$$

$$P(X = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-5} \approx 0.00674$$

Allgemeines Vorgehen

Fragestellung (betreffend unsicherem Phänomen)

Bsp: Erwartete Anzahl Überschwemmungen in den nächsten 10 Jahren?

Annahmen

Bsp: Jährliche W'keit sei $p = 0.1$, Ereignisse in verschiedenen Jahren seien unabhängig.

Modell

Bsp: Modelliere Anzahl Überschwemmungen mit Binomialverteilung.

Antwort (basierend auf Modell)

Bsp: Erwartete Anzahl, W'keit dass keine Überschwemmung, etc.