Lineare Algebra I - Prüfung Sommer 2020

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Welche der folgenden Familien bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

   (II) Sei $K[t]$ der Vektorraum der Polynome über K. Welche der folgenden Abbildungen definiert für jedes $f \in K[t]$ eine lineare Abbildung von $K[t]$ auf sich selbst?

   (a) $g \mapsto f$.

   (b) $g \mapsto f(1)g - g(1)f$.

   (c) $g \mapsto f + g$.

   (d) $g \mapsto f(1) + g(1)$.

   (III) Sei W ein Vektorraum der Dimension 2020, $U \subset W$ ein Untervektorraum der Dimension 1010 und $V \subset W$ ein beliebiger Untervektorraum. Welche der folgenden Aussagen gilt <u>nicht</u> (für alle solche U, V, W)?

   (a) $U + V$ ist ein Untervektorraum von W.

   (b) $\dim U \cap V \geqslant \dim V - 1010$.

   (c) $\dim U \cap V \leqslant 1010 - \dim V$.

   (d) Falls $\dim V > 1010$, dann ist $U \cap V \neq 0$.

   (IV) Sei $n \geqslant 1$ und $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ eine Matrix von Rang 1. Welche der folgenden Aussagen ist die stärkste richtige für alle solchen A?

   (a) Es existieren Matrizen B und C, so dass $A = BC$.

   (b) Es existieren Matrizen $B \in \mathrm{M}(n\times 1, K)$ und $C \in \mathrm{M}(1\times n, K)$, so dass $A = BC$.

(c) Es existiert eine Matrix $B \in \mathrm{M}(n \times 1, K)$, so dass $A = BB^T$.
(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

(V) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{Q})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen und $\det(A) = \lambda$. Dann gilt (für alle solche A):

(a) A^{-1} hat ganzzahlige Einträge.
(b) λA^{-1} hat ganzzahlige Einträge.
(c) $\lambda^{-1} A$ hat ganzzahlige Einträge.
(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

(VI) Sei F ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Welche der folgenden Bedingungen ist hinreichend für die Invertierbarkeit von F?

(a) F besitzt einen Eigenvektor.
(b) Alle Eigenvektoren von F sind von Null verschieden.
(c) Es existiert eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von F.
(d) Das Produkt aller Eigenwerte von F ist von Null verschieden.

(VII) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und S ein endliches Erzeugendensystem von V. Dann gilt (hierbei bezeichnet $|X|$ die Anzahl Elemente einer Menge oder Familie X):

(a) Falls $|S| > \dim V$ ist, dann ist S eine Basis von V.
(b) Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $|S| \leqslant |\mathcal{B}|$.
(c) Jede Basis $\mathcal{B}$ von V enthält alle Vektoren in S.
(d) Man kann durch Weglassen von Elementen aus S eine Basis von V bilden.

(VIII) Sei K ein Körper und $\mathrm{M}(n \times n, K)$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über K. Welche Aussage ist im Allgemeinen <u>falsch</u>?

(a) Eine Matrix A über K ist invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$ ist.
(b) Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix hängt nur von den Diagonaleinträgen ab.
(c) Fur jedes $n \geqslant 1$ ist die Determinantenabbildung $\mathrm{M}(n \times n, K) \to K$ eine lineare Abbildung.
(d) Fur jedes $n \geqslant 1$ ist die Determinantenabbildung $\mathrm{M}(n \times n, K) \to K$ surjektiv.

(IX) Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ist

(a) 0.
(b) 2.
(c) 12.
(d) 24.

(X) Seien F und G Endomorphismen eines Vektorraums V, so dass $F + G = id_V$. Dann gilt:

(a) F ist injektiv genau dann wenn G injektiv ist.

(b) F ist surjektiv genau dann wenn G surjektiv ist.

(c) F ist diagonalisierbar genau dann wenn G diagonalisierbar ist.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

2. (a) *(7 Punkte)* Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{C}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= -\lambda \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= \lambda \\ -2x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= -\lambda \\ -2x_1 + 3x_3 + \lambda^2 x_4 &= -2 \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen $(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{C}^4$?

(b) *(8 Punkte)* Sei A_λ die Koeffizientenmatrix, also

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & \lambda \\ -2 & 0 & 3 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist A_λ invertierbar? Bestimmen Sie für $\lambda = 0$ die inverse Matrix.

3. Sei K ein Körper und $V = K[t]_{\leqslant 2}$ der Vektorraum der Polynome von Grad $\leqslant 2$. Wir betrachten die Abbildung

$$F : V \to V, f \mapsto f + (t+1)f' + 2tf''.$$

Hierbei ist die (formale) Ableitung f' eines Polynoms $f = f(t)$ allgemein definiert durch

$$(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0)' = n a_n t^{n-1} + (n-1) a_{n-1} t^{n-2} + \cdots + a_1,$$

und wie üblich bezeichnen die ganzen Zahlen $1, 2, 3$, etc. die Elemente $1, 1+1, 1+1+1$, etc. von K.

(a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung definiert.

(b) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie die darstellende Matrix von F bezüglich einer Basis Ihrer Wahl.

(c) *(7 Punkte)* Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von F. Für welche endlichen Körper $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (mit p einer Primzahl) ist F diagonalisierbar? Für welche ist F invertierbar?

4. (a) *(8 Punkte)* Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ und λ Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$|\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \Big\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie einen Eigenvektor $v = (x_1, \dots, x_n)$ zum Eigenwert λ, und darin insbesondere die Koordinate x_i vom grössten Betrag, und zudem die i-te Koordinate der Gleichung $Av = \lambda v$.

(b) *(7 Punkte)* Sei $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 17 \\ 5 & 17 & 1 \\ 17 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den grössten Eigenwert von A.

Hinweis: Verwenden Sie Teil (a).

5. Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ Matrizen.

(a) *(4 Punkte)* Wir nehmen zunächst an, dass A invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann AB und BA ähnlich zueinander sind und somit das gleiche charakteristische Polynom haben.

(b) *(4 Punkte)* Sind AB und BA ähnlich zueinander für alle A und B? Begründen Sie Ihre Antwort mittels Beweis oder Gegenbeispiel.

(c) *(7 Punkte)* Zeigen Sie, dass AB und BA immer das gleiche charakteristische Polynom haben, also auch ohne die zusätzliche Bedingung in (a).

Hinweis: Sie dürfen hierfür verwenden, dass invertierbare Matrizen $P, Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ existieren, so dass

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

wobei r der Rang von A ist und E_r die $r \times r$-Einheitsmatrix. (Dies wurde in der Vorlesung gezeigt.)

6. (a) *(9 Punkte)* Für $n \geqslant 1$ und $a \neq 1$ sei $A_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix mit Einträgen a auf der Diagonalen und sonstigen Einträgen 1, also

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\det(A_n) = (a-1)^{n-1}(a+n-1).$$

(b) *(6 Punkte)* Sei für $b, c \in \mathbb{C}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(B)$. Zeigen Sie auch, dass $\det(B) = 0$ gilt, falls es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $z^3 + bz^2 = 0$ und $z^2 + cz + 1 = 0$.

Bemerkung: In der letzteren Aussage kann “falls” durch “genau dann falls” ersetzt werden, dies ist aber nicht zu zeigen.