Lineare Algebra I - Prüfung Sommer 2020

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Welche der folgenden Familien bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

   (a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

   (II) Sei $K[t]$ der Vektorraum der Polynome über K. Welche der folgenden Abbildungen definiert für jedes $f \in K[t]$ eine lineare Abbildung von $K[t]$ auf sich selbst?

   (a) $g \mapsto f$.

   (b) $g \mapsto f(1)g - g(1)f$.

   (c) $g \mapsto f + g$.

   (d) $g \mapsto f(1) + g(1)$.

   (III) Sei W ein Vektorraum der Dimension 2020, $U \subset W$ ein Untervektorraum der Dimension 1010 und $V \subset W$ ein beliebiger Untervektorraum. Welche der folgenden Aussagen gilt <u>nicht</u> (für alle solche U, V, W)?

   (a) $U + V$ ist ein Untervektorraum von W.

   (b) $\dim U \cap V \geqslant \dim V - 1010$.

   (c) $\dim U \cap V \leqslant 1010 - \dim V$.

   (d) Falls $\dim V > 1010$, dann ist $U \cap V \neq 0$.

   (IV) Sei $n \geqslant 1$ und $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ eine Matrix von Rang 1. Welche der folgenden Aussagen ist die stärkste richtige für alle solchen A?

   (a) Es existieren Matrizen B und C, so dass $A = BC$.

   (b) Es existieren Matrizen $B \in \mathrm{M}(n\times 1, K)$ und $C \in \mathrm{M}(1\times n, K)$, so dass $A = BC$.

(c) Es existiert eine Matrix $B \in \mathrm{M}(n \times 1, K)$, so dass $A = BB^T$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

(V) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{Q})$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen und $\det(A) = \lambda$. Dann gilt (für alle solche A):

(a) A^{-1} hat ganzzahlige Einträge.

(b) λA^{-1} hat ganzzahlige Einträge.

(c) $\lambda^{-1} A$ hat ganzzahlige Einträge.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

(VI) Sei F ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Welche der folgenden Bedingungen ist hinreichend für die Invertierbarkeit von F?

(a) F besitzt einen Eigenvektor.

(b) Alle Eigenvektoren von F sind von Null verschieden.

(c) Es existiert eine Basis von V bestehend aus Eigenvektoren von F.

(d) Das Produkt aller Eigenwerte von F ist von Null verschieden.

(VII) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und S ein endliches Erzeugendensystem von V. Dann gilt (hierbei bezeichnet $|X|$ die Anzahl Elemente einer Menge oder Familie X):

(a) Falls $|S| > \dim V$ ist, dann ist S eine Basis von V.

(b) Für jede Basis $\mathcal{B}$ von V ist $|S| \leqslant |\mathcal{B}|$.

(c) Jede Basis $\mathcal{B}$ von V enthält alle Vektoren in S.

(d) Man kann durch Weglassen von Elementen aus S eine Basis von V bilden.

(VIII) Sei K ein Körper und $\mathrm{M}(n \times n, K)$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über K. Welche Aussage ist im Allgemeinen <u>falsch</u>?

(a) Eine Matrix A über K ist invertierbar genau dann wenn $\det(A) \neq 0$ ist.

(b) Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix hängt nur von den Diagonaleinträgen ab.

(c) Fur jedes $n \geqslant 1$ ist die Determinantenabbildung $\mathrm{M}(n \times n, K) \to K$ eine lineare Abbildung.

(d) Fur jedes $n \geqslant 1$ ist die Determinantenabbildung $\mathrm{M}(n \times n, K) \to K$ surjektiv.

(IX) Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ ist

(a) 0.

(b) 2.

(c) 12.

(d) 24.

(X) Seien F und G Endomorphismen eines Vektorraums V, so dass $F + G = id_V$. Dann gilt:

(a) F ist injektiv genau dann wenn G injektiv ist.
(b) F ist surjektiv genau dann wenn G surjektiv ist.
(c) F ist diagonalisierbar genau dann wenn G diagonalisierbar ist.
(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Lösung: (d), (b), (c), (b), (b), (d), (d), (c), (d), (c)

2. (a) *(7 Punkte)* Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{C}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= -\lambda \\ -x_1 + x_2 - x_4 &= \lambda \\ -2x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= -\lambda \\ -2x_1 + 3x_3 + \lambda^2 x_4 &= -2 \end{aligned}$$

unendlich viele Lösungen $(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{C}^4$?

(b) *(8 Punkte)* Sei A_λ die Koeffizientenmatrix, also

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & \lambda \\ -2 & 0 & 3 & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist A_λ invertierbar? Bestimmen Sie für $\lambda = 0$ die inverse Matrix.

Lösung:

(a) Wir bringen das Gleichungssystem mittels Gauß Verfahren auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ -1 & 1 & 0 & -1 & \lambda \\ 0 & -2 & 1 & \lambda & -\lambda \\ -2 & 0 & 3 & \lambda^2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & \lambda - 2 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen genau dann wenn die letzte Zeile identisch 0 ist. Der Eintrag $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ faktorisiert als

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

und ist gerade die Determinante der Koeffizientenmatrix. Wir erhalten also eine Nullzeile und somit unendlich viele Lösungen genau dann wenn $\lambda = 2$. Für $\lambda = 1$ ergibt die letzte Zeile einen Widerspruch; das Gleichungssystem hat keine Lösung. Für $\lambda \neq 1, 2$ ist die Koeffizientenmatrix invertierbar und es gibt genau eine Lösung.

(b) In Teilaufgabe (a) haben wir bereits gesehen, dass

$$\det(A_\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2\,.$$

Daher ist A_λ invertierbar genau dann wenn $\lambda \neq 1, 2$. Für solche λ berechnen wir die Inverse:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda^2+2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-3\lambda+2 & -4 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-3\lambda+2 & -4 & -6 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

.

Wir erhalten schließlich

$$A_\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda^2-3\lambda+2}\begin{pmatrix} \lambda^2-3\lambda+6 & 6 & 3 & -1 \\ \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2-3\lambda+2 & 0 & 0 \\ 2\lambda^2-2\lambda+4 & 2\lambda^2+4 & \lambda^2+2 & -\lambda \\ -4 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

und für $\lambda = 0$:

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

3. Sei K ein Körper und $V = K[t]_{\leqslant 2}$ der Vektorraum der Polynome von Grad $\leqslant 2$. Wir betrachten die Abbildung

$$F : V \to V, f \mapsto f + (t+1)f' + 2tf''.$$

Hierbei ist die (formale) Ableitung f' eines Polynoms $f = f(t)$ allgemein definiert durch

$$(a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1t + a_0)' = na_nt^{n-1} + (n-1)a_{n-1}t^{n-2} + \cdots + a_1,$$

und wie üblich bezeichnen die ganzen Zahlen $1, 2, 3$, etc. die Elemente $1, 1+1, 1+1+1$, etc. von K.

(a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass F eine lineare Abbildung definiert.

(b) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie die darstellende Matrix von F bezüglich einer Basis Ihrer Wahl.

(c) *(7 Punkte)* Berechnen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von F. Für welche endlichen Körper $K = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (mit p einer Primzahl) ist F diagonalisierbar? Für welche ist F invertierbar?

Lösung:

(a) Die formale Ableitung ist die eindeutige lineare Abbildung mit $x^n \mapsto nx^{n-1}$ für $n \geqslant 1$ und $1 \mapsto 0$. Die Komposition sowie Addition linearer Abbildungen definiert erneut eine lineare Abbildung. Außerdem ist für beliebiges $h \in K[t]$ die Multiplikation $g \mapsto hg$ linear. Insgesamt ist daher F linear.

(b) Für die Basis $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ von V ist die darstellende Matrix von F

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Aus Teilaufgabe (b) folgt, dass

$$p_F(t) = -(t-1)(t-2)(t-3)$$

und die Eigenwerte sind 1, 2 und 3 (nicht notw. paarweise verschieden in $\mathbb{F}_p$). Für $p = 2$ ist obige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind 0 mit Vielfachheit eins und 1 mit Vielfachheit zwei. Die Abbildung ist folglich nicht invertierbar. Sie ist allerdings diagonalisierbar, da der Eigenraum

$$\operatorname{Ker}(A - E_3) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimension zwei hat.

Für $p = 3$ hat A die drei paarweise verschiedenen Eigenwerte 0, 1 und 2 und ist daher nicht invertierbar, allerdings diagonalisierbar.

Für $p \neq 2, 3$ hat A die drei paarweise verschiedenen Eigenwerte 1, 2 und 3 und ist daher sowohl invertierbar, als auch diagonalisierbar.

4. (a) *(8 Punkte)* Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ und λ Eigenwert von A. Zeigen Sie:

$$|\lambda| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \Big\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \Big\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie einen Eigenvektor $v = (x_1, \dots, x_n)$ zum Eigenwert λ, und darin insbesondere die Koordinate x_i vom grössten Betrag, und zudem die i-te Koordinate der Gleichung $Av = \lambda v$.

(b) *(7 Punkte)* Sei $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 17 \\ 5 & 17 & 1 \\ 17 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den grössten Eigenwert von A.

Hinweis: Verwenden Sie Teil (a).

Lösung:

(a) Sei $(x_1, \dots, x_n)$ Eigenvektor zu λ, so dass $|x_i| = 1$ für ein i und $|x_j| \leqslant 1$ für alle $j \neq i$. Dann ist

$$|\lambda| = |\lambda x_i| = |\sum_j x_j a_{ij}| \leqslant \sum_j |x_j| \cdot |a_{ij}| \leqslant \sum_j |a_{ij}|,$$

das heisst $|\lambda|$ ist durch die i-te Zeilensumme beschränkt, insbesondere also auch durch das Maximum.

(b) Da alle Zeilensummen 23 ergeben, ist 23 Eigenwert mit Eigenvektor $(1, 1, 1)^T$. Nach obiger Aufgabe ist aber jeder Eigenwert im Betrag durch die Zeilensummen beschränkt. Also ist 23 der grösste Eigenwert.

5. Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ Matrizen.

(a) *(4 Punkte)* Wir nehmen zunächst an, dass A invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann AB und BA ähnlich zueinander sind und somit das gleiche charakteristische Polynom haben.

(b) *(4 Punkte)* Sind AB und BA ähnlich zueinander für alle A und B? Begründen Sie Ihre Antwort mittels Beweis oder Gegenbeispiel.

(c) *(7 Punkte)* Zeigen Sie, dass AB und BA immer das gleiche charakteristische Polynom haben, also auch ohne die zusätzliche Bedingung in (a).

Hinweis: Sie dürfen hierfür verwenden, dass invertierbare Matrizen $P, Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ existieren, so dass

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

wobei r der Rang von A ist und E_r die $r \times r$-Einheitsmatrix. (Dies wurde in der Vorlesung gezeigt.)

Lösung:

(a) Aus der Assoziativität des Matrizenprodukts folgt

$$BA = (A^{-1}A)(BA) = A^{-1}(AB)A$$

und da ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben folgt die Behauptung.

(b) Im Allgemeinen sind AB und BA nicht ähnlich zueinander, z.B. für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist $AB = A$ aber $BA = 0$.

(c) Mit dem Hinweis schreiben wir

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

wobei E_r die Einheitsmatrix ist.
Wir schreiben nun B als

$$B = Q\left(Q^{-1}BP\right)P^{-1} = Q \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} P^{-1},$$

wobei C_{11} eine $r \times r$ Matrix ist. Dann gilt

$$AB = P \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} Q \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

und für das charakteristische Polynom von AB folgt

$$p_{AB}(t) = (-t)^{n-r} p_{C_{11}}(t).$$

Analoge Rechnung für BA ergibt

$$BA = Q \begin{pmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

und somit

$$p_{BA}(t) = (-t)^{n-r} p_{C_{11}}(t) = p_{AB}(t).$$

6. (a) *(9 Punkte)* Für $n \geqslant 1$ und $a \neq 1$ sei $A_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix mit Einträgen a auf der Diagonalen und sonstigen Einträgen 1, also

$$A_n = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\det(A_n) = (a-1)^{n-1}(a+n-1).$$

(b) *(6 Punkte)* Sei für $b, c \in \mathbb{C}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(B)$. Zeigen Sie auch, dass $\det(B) = 0$ gilt, falls es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $z^3 + bz^2 = 0$ und $z^2 + cz + 1 = 0$.

Bemerkung: In der letzteren Aussage kann "falls" durch "genau dann falls" ersetzt werden, dies ist aber nicht zu zeigen.

Lösung:

(a) Es ist $A_n = (a-1)E_n + \mathbf{1}\mathbf{1}^T$, wobei

$$\mathbf{1} = (1, \dots, 1).$$

Nach Sylvester's Determinanten Satz (Serie 11, Aufgabe 5(b)) ist aber

$$\det(E_n + vu^T) = 1 + v^T u,$$

und daher finden wir

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= (a-1)^n \left(1 + \frac{\mathbf{1}^T\mathbf{1}}{a-1}\right) \\ &= (a-1)^n \left(1 + \frac{n}{a-1}\right) \\ &= (a-1)^{n-1}(a+n-1). \end{aligned}$$

Alternative lässt sich die Determinante per Induktion bestimmen: Wir subtrahieren die zweite Spalte von der ersten und erhalten

$$\tilde{A}_n = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-a & a & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Laplace Entwicklung nach der ersten Spalte ergibt

$$\det(\tilde{A}_n) = (a-1)\det(A_{n-1}) - (1-a)\det B_{n-1},$$

wobei B_{n-1} aus A_{n-1} ensteht durch ersetzen des oberen linken Eintrags (also a) durch 1. Wir können die zweite Zeile von der ersten subtrahieren und erhalten mit Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det(B_{n-1}) = -(1-a)\det(B_{n-2}),$$

daher per Induktion $\det(\boldsymbol{B}_{n-1}) = (a-1)^{n-2}$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}
\det(A_n) = \det(\tilde{A}_n) &= (a-1)\det(A_{n-1}) + (a-1)(a-1)^{n-2} \\
&= (a-1)^{n-1}(a+n-2) + (a-1)^{n-1} \\
&= (a-1)^{n-1}(a+n-1)\,.
\end{aligned}$$

(b) Wir berechnen $\det(\boldsymbol{B})$ mittels Laplace Entwicklung nach der ersten Spalte, und anschließend erneut nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{B}) &= \begin{vmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \\
&= b^2 + 1 - bc
\end{aligned}$$

Wir nehmen an, es gibt $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 + bz = 0$ und $z^2 + cz + 1 = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt $z \neq 0$ und aus der ersten folgt dann $b = -z$. Daher (nach der zweiten Gleichung)

$$\det(\boldsymbol{B}) = z^2 + 1 + zc = 0\,.$$