Prof. Thomas Willwacher Herbstsemester 2019

Probeprüfung in Lineare Algebra I

D-Math, D-Phys, D-Chab

Bemerkungen:

- Bearbeitungszeit: **180 Minuten**.
- Erlaubte Hilfsmittel: Selbstverfasste Notizen auf 10 A4-Seiten, handgeschrieben oder getippt. Ein beidseitig beschriebenes/bedrucktes Blatt hat 2 Seiten. Keine Taschenrechner, Formelsammlungen, oder weitere Hilfsmittel. Wörterbücher sind erlaubt.
- Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Beantworten Sie die **Single Choice Aufgaben** auf dem beigelegten **Abgabeblatt**. Tragen Sie auf dem Abgabeblatt die **Version** Ihrer Prüfung ein. Beachten Sie die Vorgaben zum korrekten Ausfüllen des Abgabeblatts.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und schreiben Sie **auf jedes Blatt die ersten vier Buchstaben Ihres Nachnamens und Ihre vollständige Leginummer**.
- Begründen Sie Ihre Lösungen (Ausnahme: Single Choice). Sie dürfen und sollen Resultate aus der Vorlesung und den Übungen verwenden, ausser es wird explizit nach diesen Resultaten oder nach ihrem Beweis gefragt. Wenn Sie dies tun, machen Sie deutlich, wofür Sie es verwenden und auf welches Resultat Sie sich beziehen.
- **Schreiben Sie nicht mit Bleistift, roter oder grüner Farbe und verwenden Sie für die offenen Fragen kein Tipp-Ex.**
- Wir erwarten nicht, dass Sie alle Aufgaben vollständig lösen. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Die Reihenfolge der Bearbeitung der Aufgaben ist Ihnen freigestellt.
  Sollte eine Teilaufgabe besondere Schwierigkeiten bereiten, versuchen Sie dennoch, die darauffolgende zu bearbeiten.

Notation:

- Wenn nicht anders angegeben, steht das Symbol K für einen beliebigen Körper.
- Wenn nicht anders angegeben, sind die Vektorräume über einem beliebigen Körper K zu betrachten.

Viel Erfolg!

Probeprüfung

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, und den Lösungsraum $\text{Lös}(A, b)$. Dann gilt (... jeweils für alle $A \in \text{M}(m \times n, K)$, $b \in K^m$):

   (a) $\text{Lös}(A, b) \subset K^n$ ist ein Untervektorraum.
   (b) Falls $K = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, und $x, y \in \text{Lös}(A, b)$, so ist $\bar{3}x + \bar{3}y \in \text{Lös}(A, b)$.
   (c) Falls $K = \mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, und $x, y \in \text{Lös}(A, b)$, so ist $\bar{3}x + \bar{3}y \in \text{Lös}(A, b)$.
   (d) Es ist $\dim(\text{Lös}(A, b)) = n - m$.

   (II) Seien X, Y nicht-leere affine Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt (für alle solchen X, Y):

   (a) $X \cap Y$ enthält immer den Nullvektor.
   (b) Falls $\dim X + \dim Y > n$, so enthält $X \cap Y$ immer mindestens einen Punkt.
   (c) $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ ist wieder ein affiner Unterraum.
   (d) $\dim(\text{span}(X \cup Y)) = \dim(X) + \dim(Y)$.

   (III) Welche der folgenden Aussagen gilt *nicht* für jede Gruppe G:

   (a) Gilt $ab = e$ für $a, b \in G$, so ist $ba = e$. (Hier ist $e \in G$ das neutrale Element.)
   (b) Falls $ab = ba$ für $a, b \in G$, so gilt auch $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
   (c) Ist $aba = bab$ für $a, b \in G$, so ist $a = b$.
   (d) Ist $abba = baba$ für alle $a, b \in G$, dann ist G abelsch.

   (IV) Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

   (a) Haben $f, g \in \mathbb{R}[t]$ die gleichen Nullstellen in $\mathbb{R}$, so gilt $f = g$.
   (b) Haben $f, g \in \mathbb{C}[t]$ die gleichen Nullstellen in $\mathbb{C}$, so gilt $f = g$.
   (c) Haben $f, g \in \mathbb{C}[t]$ die gleichen Nullstellen in $\mathbb{C}$, mit der gleichen Vielfachheit, so gilt $f = g$.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (V) Sei $n \geqslant 4$ eine ganze Zahl und $V \subset \mathbb{F}_2^n$ definiert als $V = \text{span}(1, 1, \ldots, 1)$. Dann gilt

   (a) $|\mathbb{F}_2^n/V| = 2$.
   (b) $|\mathbb{F}_2^n/V| = 2^{n-1}$.

(c) $\dim(\mathbb{F}_2^n/V) = 2$.

(d) $\dim(\mathbb{F}_2^n/V) = 2^{n-1}$.

Hierbei bezeichnet $|S|$ die Anzahl Elemente in einer Menge S.

(VI) Sei V ein K-Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen *falsch*?

(a) Für jedes Erzeugendensystem S von V gilt $\dim_K(V) \leqslant |S|$.

(b) Für jede linear unabhängige Teilmenge S von V gilt $|S| \leqslant \dim_K(V)$.

(c) Es gilt $\dim_K(V) = |V|$.

(d) Für jede Teilmenge $S \subset V$ gilt $\dim_K(\mathrm{span}(S)) \leqslant \dim_K(V)$.

(VII) Die Aussage "$\det\colon \mathrm{M}(n \times n, K) \to K$ ist eine lineare Abbildung" ist

(a) Richtig.

(b) Falsch.

(c) Falsch, ausser für $n = 1$. (und dann richtig)

(d) Falsch, ausser für $n = 1$ und $K = \mathbb{F}_2$. (und dann richtig)

(VIII) Welche der folgenden Aussagen gilt *nicht* für alle $A, B \in \mathrm{M}(m \times n, K)$:

(a) $\det(AB^T) = 0$ falls $n < m$.

(b) Sind alle Minoren von A Null, so gilt $\det(AB^T) = 0$.

(c) Ist $n \geqslant m$ und $\det(AB^T) = 0$, so können A und B nicht beide vollen Rang m haben.

(d) Ist die zu A gehörende Abbildung $A\colon K^n \to K^m$ surjektiv und die zu B^T gehörende Abbildung $B^T\colon K^m \to K^n$ injektiv, so gilt $\det(AB^T) \neq 0$.

(IX) Sei $A \in \mathrm{M}(20 \times 20, \mathbb{Q})$ eine Matrix, so dass für jede vierreihige (4×4)-Teilmatrix A' gilt $\det(A') = 0$. Dann ist richtig:

(a) $\mathrm{rang}(A) \leqslant 16$.

(b) $\mathrm{rang}(A) > 16$.

(c) $\mathrm{rang}(A) < 4$.

(d) $\mathrm{rang}(A) \geqslant 4$.

(X) Welche Aussage ist richtig für jede Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$, mit $n \geqslant 1$?

(a) Sind alle Eigenräume eindimensional, so ist A diagonalisierbar.

(b) A ist immer diagonalisierbar, da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist.

(c) A hat n Eigenwerte, mit geometrischer Vielfachheit gezählt.

(d) A hat n Eigenwerte, mit algebraischer Vielfachheit gezählt.

2. (a) *(8 Punkte)* Man gebe eine Parameterdarstellung für die Lösungsmenge des folgenden inhomogenen Gleichungssystems in $\mathbb{R}^4$ an:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= -10 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 8\,. \end{aligned}$$

   (b) *(7 Punkte)* Finden Sie ein inhomogenes Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge folgende Parameterdarstellung besitzt:

$$\{(-2a+2, b, a, 2a-3b-1) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

3. (a) *(5 Punkte)* Gegeben seien die Unterräume

$$V := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad U := \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$$

   von $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Durchschnitts $V \cap U$.

   (b) *(5 Punkte)* Für $x \in \mathbb{Z}$ sei $B(x) \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{Z})$ definiert als

$$B(x) = \begin{pmatrix}1 & 2 & x\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie den Rang von $B(x)$ in Abhängigkeit von x.

   (c) *(5 Punkte)* Lösen Sie Teilaufgabe (b) über dem Körper $\mathbb{F}_3$.

4. Sei V der unendlich-dimensionale reelle Vektorraum aller Folgen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $f \in \operatorname{End}(V)$ der Endomorphismus

$$f(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots)\,.$$

   Weiterhin sei $W \subset V$ der Unterraum aller Folgen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ mit

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\,, \quad \forall n > 0\,.$$

   (a) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von f.

   (b) *(5 Punkte)* Beweisen Sie zuerst, dass $\dim(W) \leqslant 2$. Bestimmen Sie dann eine Basis von W, die aus Eigenvektoren von f besteht, und geben Sie die entsprechenden Eigenwerte an. Schließlich folgere man daraus, dass $\dim(W) = 2$.

   (c) *(5 Punkte)* Sei nun $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ die Fibonacci Folge, d.h. die Folge gegeben durch $a_1 = a_2 = 1$ und die Rekursion $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n > 0$. Benutzen Sie (b), um eine explizite Formel für a_n zu finden.

5. Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \geqslant 1$ und $F \colon V \to V$ ein Endomorphismus mit $F^n = 0$. Man zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (I) Es existiert ein $v \in V$, so dass $v, F(v), F^2(v), \ldots, F^{n-1}(v)$ eine Basis von V bildet.

   (II) Es gilt $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 1$.

   Gehen Sie dazu wie folgt vor.

   (a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie (I) $\Rightarrow$ (II).

   (b) *(4 Punkte)* Sei dann $W = F(V)$ und $F|_W \colon W \to W$ die Einschränkung von F auf W. Zeigen Sie, dass im Fall $n \geqslant 2$ die folgenden drei Aussagen gelten:

$$\begin{aligned} (F|_W)^{n-1} &= 0\,, \\ \dim W &\leqslant n-1\,, \\ \dim(\mathrm{Ker}(F|_W)) &\geqslant 1\,. \end{aligned}$$

   (c) *(3 Punkte)* Gilt zusätzlich $\dim(\mathrm{Ker}(F)) = 1$, so gilt auch $\dim(\mathrm{Ker}(F|_W)) = 1$ und $\dim W \geqslant 1$.

   (d) *(4 Punkte)* Zeigen Sie (II) $\Rightarrow$ (I) mit einem Induktionsargument.

6. (a) *(9 Punkte)* Sei $A_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{Q})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\ & 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & & 1 & 3 & 3 \\ & & & & & & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

   also

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{etc.}.$$

   Zeigen Sie, dass gilt

$$\det(A_n) = \frac{1}{2} n(n+3) + 1\,.$$

(b) *(6 Punkte)* Betrachten Sie eine obere Dreiecksmatrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, R)$ mit Einträgen im kommutativen Ring R, also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit Diagonaleinträgen $a_{11}, \ldots, a_{nn} \in R$. Beweisen Sie, dass

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn} \,,$$

ausgehend von der Formel von Leibniz als Definition der Determinanten von A.