Serie 1

Aussagen- und Prädikatenlogik, vollständige Induktion

1. Seien A, B, C Aussagen.

   (a) Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen $A \to B$ und $\neg B \to \neg A$ mit Hilfe einer Wahrheitstafel. Geben Sie ein Beispiel für diese Äquivalenz aus dem täglichen Leben.

   (b) Verifizieren Sie folgende Regeln mit Hilfe einer Wahrheitstafel:

   $$\begin{aligned} A \vee (A \wedge B) &\iff A && \text{(Absorption)} \\ A \vee (B \wedge C) &\iff (A \vee B) \wedge (A \vee C) && \text{(Distributivität)} \end{aligned}$$

   (c) Verifizieren Sie folgende Regeln unter Verwendung von Teilaufgabe (b):

   $$\begin{aligned} A \wedge (A \vee B) &\iff A && \text{(Absorption)} \\ A \wedge (B \vee C) &\iff (A \wedge B) \vee (A \wedge C) && \text{(Distributivität)} \end{aligned}$$

2. Seien A, B, C Aussagen. Vereinfachen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) $A \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C)$

   (b) $(A \wedge B) \vee \neg(A \vee \neg B)$

   (c) $(A \to B) \vee (B \to C)$

3. Sei $\downarrow$ die logische Operation gegeben durch die Wahrheitstabelle in Tabelle 1.

A	B	$A \downarrow B$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Tabelle 1: Wahrheitstabelle der Operation $\downarrow$.

   Zeigen Sie, dass sich die Operationen $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ durch Iterationen von $\downarrow$ ausdrücken lassen.

   Hinweis: Bestimmen Sie die Wahrheitstabelle von $A \downarrow A$.

4. Formulieren Sie die Aussagen „es gibt keine grösste natürliche Zahl" und „für jede natürliche Zahl n gibt es eine strikt grössere natürliche Zahl" in Prädikatenlogik. Zeigen Sie durch Umformung in Prädikatenlogik die Äquivalenz beider Aussagen.

5. Sei $n > 0$ eine natürliche Zahl. Beweisen Sie folgende Formeln per vollständiger Induktion.

   (a)
   $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   (b)
   $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$