Serie 2

Binomialkoeffizienten, elementare Geometrie

1. Seien n, k positive natürliche Zahlen mit $n \geqslant k$.

   (a) Man zeige die Identität
   $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

   (b) Betrachte eine Urne mit n Kugeln. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, k Kugeln mit Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge zu ziehen.

   (c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ beweise man die Formel
   $$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i .$$

2. Beweisen Sie mittels Induktion:

   (a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$
   $$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i = \frac{n^n}{n!} .$$

   (b) Für alle $n \geqslant 2$ und für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gilt
   $$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} .$$

3. Die folgende Behauptung ist falsch. Was stimmt nicht mit dem „Beweis“?

   Behauptung. Seien $n, m, k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ und $\max\{n, m\} = k$; dann gilt $n = m = k$.

   „Beweis“. Wir führen Induktion nach k.
   Induktionsverankerung $k = 0$: Aus $\max\{n, m\} = 0$ folgt $n = m = 0 = k$.
   Induktionsschritt: Aus $\max\{n, m\} = k$ folgt $\max\{n-1, m-1\} = k-1$. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $n-1 = m-1 = k-1$ und damit auch $n = m = k$. $\square$

4. Betrachte die drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 im $\mathbb{R}^3$, die durch folgende Gleichungen definiert sind

$$x + y + z = 2 \tag{1}$$
$$2x - 4y + 6z = 5 \tag{2}$$
$$3x - 5y + 7z = 6 \tag{3}$$

   (a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der drei Ebenen. Zeichnen Sie die drei Ebenen und deren Schnittpunkt (qualitativ) in ein Koordinatensystem.

   (b) Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Schnittgeraden von E_1 und E_3 und zeichnen Sie die Gerade in das Koordinatensystem ein.

   (c) Für welche $a \in \mathbb{R}$ schneidet die Gerade

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   die Ebene E_2?

5. Geben Sie je ein Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit

   (a) 2 Gleichungen, 3 Unbekannten, mehr als einer Lösung,

   (b) 3 Gleichungen, 4 Unbekannten, keiner Lösung,

   (c) 4 Gleichungen, 2 Unbekannten, genau einer Lösung.