Serie 3

Gaussches Eliminationsverfahren, Gruppenhomomorphismen

1. Betrachte folgende Matrizen und Vektoren über $\mathbb{R}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & -8 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $A_i x = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$.

   (b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $A_i x = b_i$ für $x \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2$.

2. Bestimme mit Hilfe des Algorithmus von Gauß alle Matrizen $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft, dass die Summe über alle Elemente jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen einen vorgegebenen Wert $c \in \mathbb{R}$ annimmt. Wie lautet insbesondere die Zahl a_{22}? Ergänze nun die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 16 & a_{13} \\ 24 & 30 & 36 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   so, dass sie den obigen Bedingungen genügt.

3. Betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2\alpha x_4 &= 0 \\ -6x_1 + 2x_2 + x_3 + \alpha^2 x_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens, für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt.

4. Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen?

   (a) $f_1 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,, z \mapsto 2z\,,$

   (b) $f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\,, z \mapsto z + 1\,,$

   (c) $f_3 \colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*\,, z \mapsto |z|\,,$

   (d) $f_4 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}^*\,, z \mapsto |z|\,,$

   (e) $f_5 \colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\,, z \mapsto z^p\,.$

Dabei ist die Verknüpfung in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ jeweils die Addition, in $\mathbb{R}^*$ und $\mathbb{C}^*$ jeweils die Multiplikation und p eine Primzahl.
Erinnerung: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5. Betrachte die Menge

$$G = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \setminus \{0\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}\,.$$

   (a) Verifizieren Sie, dass G mit der Multiplikation als Verknüpfung eine Gruppe bildet. Was sind die Inversen der 4 Elemente?

   (b) Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus

$$\varphi\colon \big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +\big) \to G\,,$$

   gibt, so dass $\varphi(\bar{1}) = \bar{2}$ und, dass φ ein Isomorphismus ist.

   Bemerkung: Wir werden in der Vorlesung bald allgemeiner beweisen, dass $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ eine Gruppe bildet für jede Primzahl p.