Serie 4

Gruppen, Ringe, Körper, Polynome

1. Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck Δ in der Ebene. Wir betrachten die Gruppe D_3 bestehend aus den Drehungen und Spiegelungen der Ebene, die Δ wieder auf sich abbilden.

   (a) Die Gruppe D_3 hat 6 Elemente, welche?

   (b) Ist D_3 abelsch?

   (c) Zeigen Sie, dass D_3 isomorph zur Permutationsgruppe S_3 ist.

   Hinweis: nummerieren Sie die Ecken des Dreiecks mit den Zahlen 1, 2, 3.

2. Die Ordnung $|G|$ einer endlichen Gruppe G ist die Anzahl der Elemente. Die Ordnung eines Element $a \in G$ ist die kleinste Zahl $k = 1, 2, \ldots$, so dass $a^k = e$, wobei $e \in G$ das neutrale Element ist. Zeigen Sie:

   (a) Sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann teilt die Ordnung von H die Ordnung von G.
   Hinweis: Für geeignete Elemente $g_1, \ldots, g_k \in G$ kann man G schreiben als disjunkte Vereinigung
   $$g_1 H \cup g_2 H \ldots \cup g_k H \,,$$
   und jede der Teilmengen $g_j H$ hat genau $|H|$ Elemente.

   (b) Die Ordnung jedes Elements teilt die Gruppenordnung.

   (c) Ist die Ordnung von G eine Primzahl p, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   Bemerkung: Können Sie (a) nicht lösen, so versuchen Sie dennoch (b), (c) mit Hilfe vom Ergebnis von (a) zu lösen.

3. Wir konstruieren einen (bzw. den) Körper K mit 4 Elementen. Wir betrachten dazu zunächst den Polynomring $\mathbb{F}_2[t]$, mit $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Die 4 Elemente unseres Körpers identifizieren wir mit den 4 Polynomen vom Grad $\leqslant 1$, also
   $$0\,, 1\,, t\,, 1+t\,.$$
   Die Addition ist vererbt von den Polynomen. Die Multiplikation ist gegeben durch
   $$f \cdot g = r\,,$$
   wobei r der Rest ist in der Polynomdivision mit Rest
   $$fg = (t^2 + t + 1)q + r\,.$$

(a) Erstellen Sie explizit eine 4x4 Tabelle für die Multiplikation.

(b) Was sind die (multiplikativen) Inversen der Elemente in $K^* = K \setminus \{0\}$?

(c) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.

4. Führen Sie die folgenden Polynomdivisionen mit Rest durch:

   (a) $2x^4 + x^3 + 4x^2 - 6\colon 2x + 1$, über $\mathbb{Q}$.

   (b) $3x^5 + 3x^4 + 2x^2 + 3x + 1\colon x^2 + x + 1$, über $\mathbb{Q}$.

   (c) $2x^5 - x^3 - 2x^2 + 3\colon 2x^2 - 1$, über $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

   (d) $x^n - 1\colon x - 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

   (e) $x^3 - x^2 - 4x + 4\colon x^2 - a$, über $\mathbb{Q}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist der Rest 0? Was sagt dies über die Nullstellen des Polynoms links?

5. Faktorisieren Sie folgendes Polynom so weit wie möglich jeweils über den rationalen zahlen $\mathbb{Q}$ und über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_5$:

$$F(X) := X^5 + 9X^4 + 31X^3 + 53X^2 + 48X + 18\,.$$

   Hinweis: Finden Sie alle Nullstellen in $\mathbb{Q}$. Einige Nullstellen kann man "erraten", indem man kleine Ganzzahlen einsetzt.