Serie 5

Nullstellen, Vektorräume

1. Betrachten Sie ein Polynom $F(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ mit $a_n \neq 0$. Zeigen Sie: Für jede Nullstelle $\frac{b}{c} \in \mathbb{Q}$ von F mit teilerfremden $b, c \in \mathbb{Z}$ gilt $b | a_0$ und $c | a_n$.

2. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Polynome in den komplexen Zahlen:

   (a)
   $$f_1(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$$

   (b)
   $$f_2(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 4$$

3. Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume? Was passiert, wenn in (b) und (c) der Körper $\mathbb{R}$ durch den endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ ersetzt wird?

   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$

   (b) $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

   (c) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

   (d) $\{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

4. Zeigen Sie, dass die Funktionen
   $$\varphi_n : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{n+x}$$
   für $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ linear unabhängig sind.

   Hinweis: Verwenden Sie, dass ein von Null verschiedenes Polynom nur endlich viele Nullstellen hat.

5. Zeigen Sie, dass
   $$U = \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5) \,|\, \sum_{i=0}^{4} f(\bar{i}) = 0\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_5)$$
   ein Untervektorraum ist. Bestimmen Sie eine Basis von U.