Serie 6

Lineare Unabhängigkeit, Basis, Dimension

1. Sei $U \subseteq K^5$ der von den folgenden Vektoren aufgespannte Untervektorraum

$$(1,1,0,1,1)\,,\ (0,0,1,1,0)\,,\ (0,1,0,0,0)\,,\ (1,0,0,1,1)\,,\ (1,0,1,0,1)\,.$$

Bestimmen Sie $\dim U$ im Falle $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{F}_2$.

2. Betrachten Sie die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\,.$$

Welche der folgenden Mengen von Vektoren ist eine Basis der Lösungsmenge $\text{Lös}(A,0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},\ \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der folgenden Vektorräume:

   (a) Der lineare Unterraum des $\mathbb{R}^5$, aufgespannt durch die Vektoren

   $$(1,3,4,0,1)\,,(2,5,6,-2,1)\,,(1,5,8,4,3)\,,$$

   (b) Die Lösungsmenge in $\mathbb{R}^3$ von

   $$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0, \end{array}$$

   (c) $\{0\}$,

   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$,

   (e) $\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + iy = 0\}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

4. Sind + und $\cap$ von Unterräumen zueinander distributiv, das heißt, gelten für alle Unterräume eines beliebigen Vektorraums die folgenden Gleichungen?

$$\begin{aligned} U \cap (V_1 + V_2) &= (U \cap V_1) + (U \cap V_2) \\ U + (V_1 \cap V_2) &= (U + V_1) \cap (U + V_2) \end{aligned}$$

   Wenn nicht, gilt zumindest eine Inklusion?

5. In dieser Aufgabe soll das in der Vorlesung gezeigte Resultat der Existenz einer Basis auf nicht endlich erzeugte Vektorräume ausgedehnt werden. Dazu benötigen wir folgende Begriffe aus der Mengenlehre.

   - Eine Halbordnung '$\leqslant$' auf einer Menge X ist eine Relation auf X (also eine Teilmenge der Menge der Paare in X), so dass gilt:

     Reflexivität: $\forall x \in X \;:\; x \leqslant x$,
     Transitivität: $x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$,
     Antisymmetrie: $x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Rightarrow x = y$.

   - Ein Element $x \in X$ heisst maximal, falls $x \leqslant y \Rightarrow x = y$ gilt. (Also, es gibt kein 'echt grösseres' Element in X).
   - Ein Element $z \in X$ heißt obere Schranke der Teilmenge $Y \subset X$, falls gilt, dass

     $$\forall y \in Y \;:\; y \leqslant z\,.$$

     Achtung: z muss nicht Element sein von Y, nur von X.
   - Eine totale Ordnung ist eine Halbordnung, in der beliebige $x, y \in X$ vergleichbar sind, also $x \leqslant y$ oder $y \leqslant x$ gilt.
   - Eine Kette in einer halbgeordneten Menge $(X, \leqslant)$ ist eine Teilmenge $Y \subset X$, die (bzgl. $\leqslant$) total geordnet ist.

   Beispiele:

   - $\mathbb{R}$ ist total geordnet durch die übliche Relation '$\leqslant$'.
   - $\mathbb{C}$ ist (z.B.) halbgeordnet mit $z \leqslant w$, falls $Im(z) = Im(w)$ und $Re(z) \leqslant Re(w)$. Hier sind also nur Zahlen mit gleichem Imaginärteil vergleichbar.
   - Sei S eine beliebige Menge. Dann ist die Menge der Teilmengen von S halbgeordnet mit $U \leqslant V$ falls $U \subset V$.

   Zornsches Lemma: Sei $(X, \leqslant)$ eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat. Dann existiert ein maximales Element in X.

   Das Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom; wir werden es ohne Beweis annehmen. Wir wollen nun zeigen, dass jeder Vektorraum V eine Basis hat.

(a) Sei $B \subset V$ eine unverlängerbare linear unabhängige Teilmenge, das heißt für alle $v \in V$ ist $B \cup v$ linear abhängig. Dann ist B eine Basis von V. (Hierfür brauchen Sie weder das Zornsche Lemma, noch die anderen Begriffe in der Aufgabenstellung.)

(b) Sei X die Menge der linear unabhängigen Teilmengen von V. Wir betrachten darauf die Halbordnung durch Inklusion, also $B \leqslant B'$, falls $B \subset B'$. Zeigen Sie, dass in $(X, \leqslant)$ jede Kette eine obere Schranke hat.

(c) Benutzen Sie das Zornsche Lemma um ein maximales Element von X zu konstruieren. Folgern Sie mit (a), dass dieses eine Basis von V ist. Also hat jeder Vektorraum eine Basis.