Serie 7

(Direkte) Summen, Lineare Abbildungen

1. Prüfen Sie nach, ob die folgenden Summen von Vektorräumen (über $\mathbb{R}$) direkt sind oder nicht, also ob $U + V = U \oplus V$, bzw. $U + V + W = U \oplus V \oplus W$, mit U, V, W den jeweils angegebenen Untervektorräumen des $\mathbb{R}^4$ (für a),b),c)) bzw. des Vektorraumes $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (für d)).

   (a) $\mathrm{span}((1, 0, 0, 1)\,, (2, 3, -3, 9)) + \mathrm{span}((1, 3, -4, 7)\,, (2, 0, 1, 3))$,

   (b) $\mathrm{span}(1, 2, 3, 4)\,, ((-3, 4, 2, 8)) + \mathrm{span}((-3, 9, 1, 3))$,

   (c) $\mathrm{span}(1, 2, 3, 4)\,, (-3, -6, -9, -12)) + \mathrm{span}((-3, 4, 2, 8)\,, (-3, 9, 1, 3))$,

   (d) $\mathrm{span}(\sin(x)) + \mathrm{span}(\sin(x + 1)) + \mathrm{span}(\sin(x + 2))$.

2. Sind V und W Vektorräume, so gilt
$$V \times W = (V \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times W)\,.$$

3. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität. Falls die Abbildung linear ist, untersuchen Sie sie auf Injektivität und Surjektivität und bestimmen Sie Kern und Bild.

   (a) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, (x, y) \mapsto (3x + 2y, -x - 2y/3)$,

   (b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, (x, y) \mapsto x + y$,

   (c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, x \mapsto ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$,

   (d) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, z \mapsto \bar{z}$,

   (e) $\mathbb{C} \to \mathbb{C}\,, z \mapsto \bar{z}$ über $\mathbb{R}$,

   (f) $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,, u \mapsto u(1)$,

   (g) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}\,, u \mapsto u(1)$,

   (h) $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]\,, u \mapsto u'$, wobei u' die formale Ableitung von u ist.

   Hinweis: $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist der Vektorraum der linearen Abbildungen und $\mathbb{R}[x]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$.

4. Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch die folgenden Matrizen:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix},\ a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$
   Bestimmen Sie jeweils Basen für Kern und Bild von f und verifizieren Sie die Dimensionsformel.

5. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

   (a) Für jeden Untervektorraum $W' \subset W$ ist das Urbild

   $$f^{-1}(W') := \{v \in V \mid f(v) \in W'\}$$

   ein Untervektorraum von V.

   (b) Es gilt

   $$\dim f^{-1}(W') = \dim \operatorname{Ker}(f) + \dim(\operatorname{Im}(f) \cap W')\,.$$