Serie 8

Quotientenräume, Lineare Gleichungssysteme

1. Es sei $V := \mathbb{R}^5$ und $U \subset V$ der Untervektorraum aufgespannt durch

$$v_1 = \ (1,2,0,-1,1)^T\,, v_2 = (0,1,1,0,1)^T\,, v_3 = (0,1,1,1,1)^T\,.$$

   (a) Finden Sie eine Basis $w_1\,, w_2$ des Quotientenvektorraums V/U.

   (b) Wir definieren eine Abbildung $f\colon V/U \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x_1 w_1 + x_2 w_2) = (x_1, x_2)\,.$$

   Sei $\rho\colon V \to V/U$ die Projektion und definiere $F\colon V \to \mathbb{R}^2$ als Komposition

$$V \xrightarrow{\rho} V/U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2\,.$$

   Bestimmen Sie $F(e_j)$, wobei $e_1, \ldots, e_5$ die Standardbasis von V ist.

2. Es sei K ein Körper. Beweisen Sie: Jeder k-dimensionale Untervektorraum U von K^n ist Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems

$$Ax = 0$$

   für eine $m \times n$-Matrix A. Welcher ist der minimale Wert von m?

   Hinweis: Man verwende zur Lösung den Quotientenvektorraum K^n/U und die Abbildung $K^n \to K^n/U$.

3. Sei $V \subset \mathbb{R}[t]$ der Vektorraum aller Polynome $p(t)$ vom Grad $\leqslant 4$. Wir betrachten folgende Bedingungen:

   (i) $\int_0^1 p(t) = 0$,

   (ii) $p''(0) = p(0)$,

   (iii) $p(1) = \lambda$.

   Bestimmen Sie, in Abhänigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$, die Menge der Polynome $p(t) \in V$, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllen.

4. Es sei $V \subset \mathbb{F}_p[t]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leqslant 4$. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{F}_p$, die Menge der Polynome $p(t) \in V$, die die Gleichung

$$p(1) = p'(1)$$

   und die Bedingungen (ii) und (iii) erfüllen.

5. Wir betrachten folgendes Gleichungssystem über einem beliebigen Körper K.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Für welche $\lambda \in K$ hat das Gleichungssystem (i) genau eine Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen oder (iii) keine Lösung.

Bemerkung: Wer sich nicht sicher ist im Umgang mit allgemeinen Körpern soll die Aufgabe über $K = \mathbb{R}$ lösen.