Serie 9

Matrizen

1. (a) Seien m, $n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Berechnen Sie C^3, wobei

$$C = \begin{pmatrix} 1 - mn & -m^2 n \\ n & 1 + mn \end{pmatrix} .$$

Ist C^k invertierbar, für alle $k \in \mathbb{Z}_{>0}$?

(b) Seien φ, $\theta \in \mathbb{R}$ und

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

die Matrix, die eine Drehung des $\mathbb{R}^2$ um den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn beschreibt, wie in der Vorlesung. Man zeige, dass

$$R_\varphi R_\theta = R_{\varphi+\theta} , \qquad R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi} .$$

Hinweis: Sie dürfen die Additionsformeln für cos und sin verwenden:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) ,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) .$$

Diese werden in der Analysis bewiesen, oder können schnell selbst hergeleitet werden aus folgenden zwei Aussagen:

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)} , \qquad e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) .$$

2. (a) Seien $A \in \mathrm{M}(m \times n, K)$, $B \in \mathrm{M}(n \times r, K)$ Matrizen und $a_1, \dots, a_n \in \mathrm{M}(m \times 1, K)$ die Spalten von A und $b_1, \dots, b_n \in \mathrm{M}(1 \times r, K)$ die Zeilen von B. Dann gilt

$$AB = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n .$$

(b) Man schreibe folgende Matrizen als Produkt von möglichst kleinen Matrizen:

$$A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n, K) \text{, mit } a_{ij} = 1 \text{ für alle } i, j ,$$
$$B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n, K) \text{, mit } b_{ij} = 2x^{i-j} ,$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. Wir wollen eine Methode angeben, um die Inverse einer Matrix auszurechnen: Sei dazu $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ invertierbar, d.h. $\mathrm{Rg}(A) = n$. Zeigen Sie: Ist
$$x^i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{pmatrix}$$
die Lösung des Gleichungssystems $Ax = e_i$, so ist
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie auf diese Weise die inverse Matrix von
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$
Hinweis: Wir bezeichnen hierbei mit e_i den i-ten Standardbasisvektor. Man kann in der Aufgabe Arbeit sparen und alle 4 Gleichungssysteme gleichzeitig Lösen, indem man die Zeilenumformungen direkt auf die 4×8 Matrix $(A,\, E_4)$ anwendet, wobei E_4 die Einheitsmatrix ist.

4. Sei $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $V_n = \mathrm{span}(1, \dots, t^n) \subset \mathbb{R}[t]$ mit der Basis $B_n = (1, \dots, t^n)$. Es sei
$$\mathrm{D}_n \colon V_n \to V_{n-1}, \qquad \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^{m} k a_k t^{k-1}$$
der Ableitungshomomorphismus.
   (a) Bestimmen Sie die Matrix $M^{B_n}_{B_{n-1}}(\mathrm{D}_n)$.
   (b) Wir betrachten $C_n = (1, 1+t, 1+t+t^2, \dots, 1+\dots+t^n)$. Zeigen Sie, dass C_n eine Basis von V_n ist und berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T^{B_n}_{C_n}$ und $T^{C_n}_{B_n}$.
   (c) Bestimmen Sie die Matrix $M^{C_n}_{C_{n-1}}(\mathrm{D}_n)$.

5. Seien U, V, W beliebige Vektorräume. Beweisen Sie folgende Ungleichungen:
   (a) Für beliebige lineare Abbildungen $f, g \colon U \to V$ gilt
$$\mathrm{Rg}(f+g) \leqslant \mathrm{Rg}(f) + \mathrm{Rg}(g).$$
   (b) Für beliebige lineare Abbildungen $f \colon U \to V$ und $g \colon V \to W$ gilt
$$\mathrm{Rg}(g \circ f) \leqslant \min\{\mathrm{Rg}(f), \mathrm{Rg}(g)\}.$$
   (c) Formulieren und beweisen Sie analoge Eigenschaften für Matrizen.