Serie 10

Koordinatentransformationen

1. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen
$$\mathcal{A} = ((1,-1,2),(2,3,7),(2,3,6)) \text{ und } \mathcal{B} = ((1,2,2),(-1,3,3),(-2,7,6))$$
gegeben.
   (a) Berechnen Sie die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.
   (b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors
   $$v = 2\cdot(1,-1,2) + 9\cdot(2,3,7) - 8\cdot(2,3,6)$$
   bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

2. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $(x,y) \mapsto (x-2y, -2x+4y, 3x-6y)$. Finden Sie Basen von $\mathbb{R}^2$ und von $\mathbb{R}^3$, bezüglich welcher die Matrix $A = (a_{ij})$ von f die Normalform
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \leqslant r, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
annimmt.

3. Wir betrachten den Endomorphismus $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, der bezüglich der kanonischen Basis durch die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$
beschrieben wird.
   (a) Verifizieren Sie, dass $F^2 := F \circ F \neq 0$ und $F^3 := F \circ F \circ F = 0$.
   (b) Finden Sie eine Basis u, v, w von $\mathbb{R}^3$ derart, dass $F(u) = v$, $F(v) = w$, $F(w) = 0$.
   (c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von F bezüglich der Basis u, v, w.

4. Man beweise:
   (a) Eine Matrix $C \in \mathrm{M}(m \times n, K)$ hat genau dann Rang $\leqslant r$, wenn es Matrizen $A \in \mathrm{M}(m \times r, K)$ und $B \in \mathrm{M}(r \times n, K)$ gibt, so dass $C = AB$.
   (b) Ist $\mathrm{rang}(C) = r$, so muss zusätzlich $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = r$ gelten.

5. Man berechne die Determinante der Elementarmatrizen $S_i(\lambda)$, $Q_i^j(\lambda)$, P_i^j nur unter Benützung der Axiome D1)–D3) der Determinante.