D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2019
Prof. Thomas Willwacher

Serie 11

Determinante

1. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{R}$ und über dem Körper $\mathbb{F}_5$. Ist B invertierbar?

2. Sei $A_n \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie:

$$\det(A_n) = n + 1\,.$$

3. Seien a und b Elemente eines Körpers K und für $n \geqslant 1$ sei A_n die $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie:

$$\det(A_n) = (b-a)^{n-1}\big(b + (n-1)a\big).$$

4. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in K$. Wir betrachten die Vandermonde-Matrix $V(x_1, \dots, x_n)$ definiert als

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie:

$$\det(V(x_1, \ldots, x_n)) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)\,.$$

5. Sei K ein Körper, $S \in \mathrm{GL}(n, K)$ und $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ Matrizen und $u\,, v \in \mathrm{M}(n \times 1, K)$ Spaltenvektoren. Man zeige:

   (a)
   $$\det(SAS^{-1}) = \det(A)\,,$$

   (b)
   $$\det(E_n + uv^T) = 1 + v^T u\,,$$

   (c)
   $$\det(S + uv^T) = \det(S)(1 + v^T S^{-1} u)\,.$$