D-MATH | Lineare Algebra I | HS 2019
Prof. Thomas Willwacher

Serie 12

Determinante, Eigenwerte

1. Sei die Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{Q})$ definiert als
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

2. Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g\colon V \to V$ Endomorphismen mit $g^2 = \mathrm{id}$ und $f^2 = a \cdot f$ für ein gewisses $a \in K^*$.
   (a) Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte von f und g, also die möglichen Mengen $\mathrm{EW}(f), \mathrm{EW}(g) \subset K$.
   (b) Beweisen Sie, dass f diagonalisierbar ist.
   (c) Zeigen Sie, dass unter der Voraussetzung $\mathrm{char}(K) \neq 2$ der Endomorphismus g diagonalisierbar ist. Gilt diese Behauptung auch ohne die Voraussetzung an die Charakteristik?

3. Sei V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ linear. Zeigen Sie: Hat $f^2 + f$ den Eigenwert -1, so hat f^3 den Eigenwert 1.

4. Seien x_i und y_i Elemente eines Körpers mit $x_i \neq y_j$ für alle i, j und sei
$$F_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) := \det\left(\left(\frac{1}{x_i - y_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\right).$$
   (a) Beweisen Sie für alle $n \geqslant 1$ die Rekursionsformel
$$F_n(x_1, \ldots, y_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - x_i)(y_i - y_n)}{\prod_{i=1}^{n}(x_i - y_n)\prod_{i=1}^{n-1}(x_n - y_i)} F_{n-1}(x_1, \ldots, y_{n-1}).$$
   Hinweis: Subtrahieren Sie die letzte Spalte von jeder anderen Spalte. Subtrahieren Sie dann ein geeignetes Vielfache der letzten Zeile von jeder anderen Zeile.
   (b) Leiten Sie daraus eine Formel für $F_n(x_1, \ldots, y_n)$ her.

(c) Zeigen Sie, dass mit $c_n := \prod_{i=1}^{n-1} i!$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \frac{c_n^4}{c_{2n}}.$$

5. Sei K ein Körper und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ antisymmetrisch (bzw. schiefsymmetrisch), das heißt $A^T = -A$. Zeigen Sie:

   (a) Falls n ungerade und $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist $\det(A) = 0$.

   *(b) Sei nun $n = 2m$ gerade und $\mathrm{char}(K) = 0$. Definiere die Pfaffsche Determinante als

   $$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\sigma \in S_{2m}} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}.$$

   Dann gilt

   $$\det(A) = \mathrm{Pf}(A)^2.$$

   Bemerkung: Ist (b) zu schwierig, so prüfe man die Fälle $m = 1$ und $m = 2$ explizit nach. Die Bedingung $\mathrm{char}(K) = 0$ kann auf $\mathrm{char}(K) \neq 2$ abgeschwächt werden, aber nicht weiter. Wer will, kann noch für $\mathrm{char}(K) = 2$ ein Gegenbeispiel finden.