Serie 13

Charakteristisches Polynom, Diagonalisierung

1. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

2. Sei die Matrix $A \in \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{Z})$ definiert als

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 & 1 \\ -8 & 1 & -12 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -6 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Betrachten Sie A über dem Körper $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte, sowie die zugehörigen Eigenräume von A. Ist A diagonalisierbar?

(b) Lösen Sie Teilaufgabe (a) über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

(c) Berechnen Sie A^{2019} über $\mathbb{F}_5$.

3. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F_1, \ldots, F_r \in \mathrm{End}(V)$ diagonalisierbare Endomorphismen, so dass $F_i F_j = F_j F_i$ für alle i und j. Zeigen Sie, dass $F_1, \ldots, F_r$ gleichzeitig diagonalisierbar sind, d.h. es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass alle $M_{\mathcal{B}}(F_j)$ diagonal sind.

4. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ und

$$P_A(t) = (-1)^n \big(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0\big)$$

das charakteristische Polynom von A. Weiter sei

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$P_C(t) = P_A(t)\,.$$

(b) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Es existiert $v \in \mathbb{C}^n$, so dass
$$v, Av, \ldots, A^{n-1}v$$
eine Basis von $\mathbb{C}^n$ bilden.

(ii) Es existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass
$$S^{-1}AS = C\,.$$

5. Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{M}(m \times m, K)$, $B \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ Matrizen. Wir betrachten die lineare Abbildung
$$\begin{aligned} F_{A,B}\colon M(m \times n, K) &\to M(m \times n, K) \\ X &\mapsto AXB\,. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass
$$\begin{aligned} P_{F_{A,E_n}}(t) &= P_A(t)^n\,, \\ P_{F_{E_m,B}}(t) &= P_B(t)^m\,. \end{aligned}$$

(b) Seien A und B diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ bzw. $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Dann gilt
$$P_{F_{A,B}}(t) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (\lambda_i \mu_j - t)\,.$$