Übungsserie 2

Abgabe bis zum 7. Oktober
Empfohlene Aufgaben: 1,2,3,5,6,9,13,14
Bewertete Aufgaben: 1,3,13

Aufgabe 1. Sei X eine Menge. Wie behandeln in dieser Aufgabe Relationen auf X als Teilmengen von $X \times X$. Sei $U \subseteq X \times X$ eine Teilmenge, und es bezeichne $\mathcal{S}_U$ die Menge aller Äquivalenzrelationen auf X die U als Teilmenge enthalten. Zeigen Sie, dass

$$R := \bigcap_{S \in \mathcal{S}_U} S$$

eine Äquivalenzrelation auf X ist. Die Äquivalenzrelation R wird als **von U erzeugte Äquivalenzrelation** bezeichnet. Betrachten Sie das konkrete Beispiel $X = \mathbb{Z}$ und

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \geq 100\}$$

Was ist die von U erzeugte Äquivalenzrelation?
In der Aufgabe 5 von Serie 1 wurde auch eine erzeugte Äquivalenzrelation betrachtet. Was war U in jener Aufgabe?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Aufgabe 3. Sei X eine unendliche Menge, und sei $x \in X$. Zeigen Sie, dass es eine Bijektion $f : X \longrightarrow X \setminus \{x\}$ gibt. Benutzen Sie falls nötig das Auswahlaxiom.

Aufgabe 4. Es bezeichne $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ die Menge aller *endlichen* Teilmengen von $\mathbb{N}$. Ist die Menge $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ abzählbar?

Aufgabe 5. Entscheiden Sie für sich, welche der folgenden Aussagen wahr sind, und welche falsch. Vergleichen Sie Ihre Antworten mit einem Mitstudenten.
Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion. Seien A, A_1, A_2 Teilmengen von X, und B, B_1, B_2 Teilmengen von Y.

(1) $f(A_1) \cup f(A_2) = f(A_1 \cup A_2)$	(4) $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cup B_2)$
(2) $f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$	(5) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$
(3) $f^{-1}(f(A)) = A$	(6) $f(f^{-1}(B)) = B$

Welche der falschen Aussagen sind wahr, wenn man zusätzlich annimmt, dass es sich bei f um eine injektive bzw eine surjektive Funktion handelt?

Aufgabe 6. Seien X und Y Mengen, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\equiv$ eine Äquivalenzrelation auf Y. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, so dass

$$x_1 \sim x_2 \implies f(x_1) \equiv f(x_2)$$

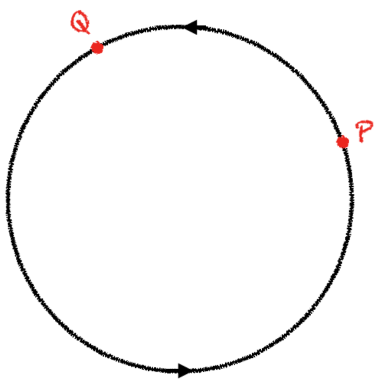
für alle x_1, x_2 gilt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung $g : X/_\sim \longrightarrow Y/_\equiv$ gibt, die

$$g([x]_\sim) = [f(x)]_\equiv$$

für alle $x \in X$ erfüllt.

(1) Angenommen $f : X \longrightarrow Y$ sei surjektiv. Folgt daraus, dass auch g surjektiv ist?
(2) Angenommen $f : X \longrightarrow Y$ sei injektiv. Folgt daraus, dass auch g injektiv ist?
(3) Angenommen $g : X/_\sim \longrightarrow Y/_\equiv$ sei surjektiv. Folgt daraus, dass auch f surjektiv ist?
(4) Angenommen $g : X/_\sim \longrightarrow Y/_\equiv$ sei injektiv. Folgt daraus, dass auch f injektiv ist?

Aufgabe 7. Wir betrachten die Menge aller Punkte auf einer Kreislinie in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Für zwei Punkte P und Q sagen wir, dass $P \leq Q$ gelte, wenn $P = Q$ gilt, oder wenn der Kreisbogen von P nach Q im Gegenuhrzeigersinn (strikt) kürzer ist als der Kreisbogen von Q nach P im Gegenuhrzeigersinn.



Ist die so definierte Relation eine Ordnungsrelation auf den Punkten der Kreislinie? Kann es auf dieser Menge überhaupt eine Ordnungsrelation geben?

Aufgabe 8. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage, in dem Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel angeben:

Sei X eine nichtleere Menge, und sei $\mathcal{E}$ die Menge aller strikten Teilmengen $E \subsetneq X$ von X. Dann ist die Menge $\mathcal{E}$ mit der Ordnungsrelation $\subseteq$ induktiv geordnet.

Ändert sich etwas, wenn man zusätzlich annimmt, dass X eine endliche Menge ist?

Aufgabe 9. Sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Falls es $m \in X$ gibt, so dass $x \leq m$ für alle $x \in X$ gilt, dann heisst $m \in X$ das **Maximum** von X. Überzeugen Sie sich davon, dass X höchstens ein Maximum haben kann. Finden Sie Beispiele für folgende Situationen, oder zeigen Sie, dass das nicht möglich ist:

(1) Die geordnete Menge X besitzt kein Maximum, und auch keine maximalen Elemente.
(2) Die geordnete Menge X besitzt maximale Elemente, aber kein Maximum.
(3) Die geordnete Menge X besitzt genau ein maximales Element, aber kein Maximum.

Aufgabe 10 (Aufgabe zum Schreibstil)**.** Seien X und Y Mengen. Beweisen Sie im Detail, dass es eine injektive Abbildung $X \longrightarrow Y$ oder eine injektive Abbildung $Y \longrightarrow X$ gibt. Halten Sie sich dabei an die folgende grobe Skizze.

Beweisskizze: Wir betrachten die Menge $\mathcal{U}$ aller Paare (U, φ), wobei U eine Teilmenge von X ist, und $\varphi : U \longrightarrow Y$ eine injektive Funktion. Wir ordnen die Menge $\mathcal{U}$ in dem wir $(U, \varphi) \leq (V, \psi)$ als

$$(U \subseteq V) \wedge (\varphi = \psi|_U)$$

definieren. Die so geordnete Menge $\mathcal{U}$ erfüllt die Hypothese im Zorn'schen Lemma. Wir wählen ein maximales Element (U_0, φ_0) aus $\mathcal{U}$. Falls $U_0 = X$ gilt, sind wir fertig. Falls $\varphi_0(U_0) = Y$ gilt, so ist φ_0 bijektiv, und wir erhalten aus φ_0^{-1} so eine Injektion $Y \longrightarrow X$. Schliesslich, falls weder $U_0 = X$ noch $\varphi_0(U_0) = Y$ gilt, so steht das im Widerspruch zur Maximalität von (U_0, φ_0).

Aufgabe 11 (Recherche)**.** Finden Sie heraus was man unter einer unabhängigen Menge von Knoten in einem (ungerichteten) Graphen versteht. Zeigen Sie mit Hilfe des Zorn'schen Lemmas, dass es in jedem Graphen eine maximale unabhängige Menge von Knoten gibt.

Aufgabe 12. Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt, die K zu einem angeordneten Körper machen würde.

Aufgabe 13. Sei K ein Körper. Angenommen es gibt ein Element $u \in K$ mit der Eigenschaft $u^2 + 1 = 0$. Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt, die K zu einem angeordneten Körper machen würde.

Aufgabe 14. Sei K ein Körper. Ein **Positivkegel** in K ist eine Teilmenge $P \subseteq K$, die folgenden Bedingungen genügt:

(1) Für alle $x, y \in P$ gilt $x + y \in P$ und $xy \in P$.
(2) Für alle $x \in K$ gilt $x \in P$ oder $-x \in P$.
(3) $-1 \notin P$.

Zeigen Sie, dass Ordnungsrelationen, die K zu einem angeordneten Körper machen, und Positivkegel in Bijektion zueinander stehen.

Hinweis: Der Positivkegel, welcher mit einer Ordnungsrelation $\leq$ assoziiert wird, ist $P = \{x \in K \mid x \geq 0\}$. Wie bekommt man umgekehrt einen angeordneten Körper aus einem Positivkegel $P \subseteq X$?

Aufgabe 15 (Challenge)**.** Ein Körper K heisst **formal reell**, falls für alle $x_1, \ldots x_n \in K$ gilt:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Falls es auf K eine Ordnung gibt, die K zu einem angeordneten Körper macht, dann ist K formal reell - das können Sie als kleine Verallgemeinerung der Aufgabe 14 nachprüfen. Zeigen Sie die reziproke Implikation:

Satz: *Sei K ein formal reeller Körper. Dann existiert eine Ordnungsrelation $\leq$ auf K, die K zu einem angeordneten Körper macht.*

Hinweis: Welche der Eigenschaften eines Positivkegels erfüllt die Teilmenge $\Sigma \subseteq K$ all derjenigen Elemente, die man als Summe von Quadraten schreiben kann? Formalisieren Sie, und wenden Sie das Zorn'sche Lemma auf derartige Teilmengen an.