Übungsserie 6

Abgabe bis zum 4. November
Empfohlene Aufgaben: 2,4,5,6,7,8,15,17
Bewertete Aufgaben: 2,5,6

Aufgabe 1. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x$. Beweisen Sie im Detail und nur mit den aus der Vorlesung bekannten Methoden, dass

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

gilt.

Aufgabe 2. Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$. Beweisen Sie im Detail und nur mit den aus der Vorlesung bekannten Methoden, dass

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}$$

gilt. Benutzen Sie die Formel

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

die Sie mittels vollständiger Induktion beweisen.

Aufgabe 3. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x^2$. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b f dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

gilt. Benutzen Sie wieder die Formel aus Aufgabe 2.

Aufgabe 4. Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Beweisen Sie, dass

$$f = 0 \iff \int_a^b |f(x)|\, dx = 0$$

gilt.

Aufgabe 5. Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

gilt. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a, b]$ gibt, so dass $f(y) = g(y)$. Benutzen Sie Aufgabe 4.

Aufgabe 6. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $y \in [a, b]$ gibt, so dass

$$\int_a^b f(x)dx = f(y)(b - a)$$

ist.

Aufgabe 7. Seien $a < b < c$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : [a, c] \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann integrierbar ist, wenn $f|_{[a,b]}$ und $f|_{[b,c]}$ integrierbar sind, und dass in diesem Fall

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f|_{[a,b]} dx + \int_b^c f|_{[b,c]} dx$$

gilt.

Aufgabe 8. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und sei $f^* : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die erhalten wurde, indem der Wert von f an endlich vielen Punkten in $[a, b]$ abgeändert wurde. Zeigen Sie, dass f^* Riemann-integrierbar ist und das gleiche Riemann-Integral wie f hat.

Aufgabe 9. Seien f und g beschränkte Funktionen auf $[a, b]$. Zeigen Sie, dass die Menge aller Untersummen $\mathcal{U}(f)$ von f ein Intervall ist. Im Kurs haben wir die Inklusion

$$\mathcal{U}(f) + \mathcal{U}(g) \subseteq \mathcal{U}(f + g)$$

benutzt. Vergewissern Sie sich noch einmal, dass das tatsächlich stimmt, und finden Sie ein Beispiel, in dem diese Inklusion strikt ist.

Aufgabe 10. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, und $\lambda > 0$ eine reelle Zahl. Sei $g : [\lambda a, \lambda b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion die durch $g(x) = f(\lambda^{-1}x)$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass g integrierbar ist, und dass

$$\lambda \int_a^b f dx = \int_{\lambda a}^{\lambda b} g dx$$

gilt.

Aufgabe 11. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

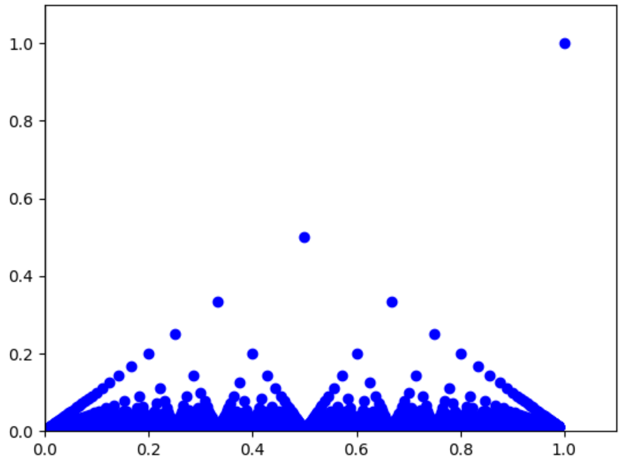
$$f(x) = \begin{cases} (-2)^{-n} & \text{falls } 2^{-(n+1)} < x \leq 2^{-n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Ist die Funktion f eine Treppenfunktion? Ist sie stetig oder monoton? Zeigen Sie, dass f integrierbar ist und berechnen Sie das Integral.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ irrational oder } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

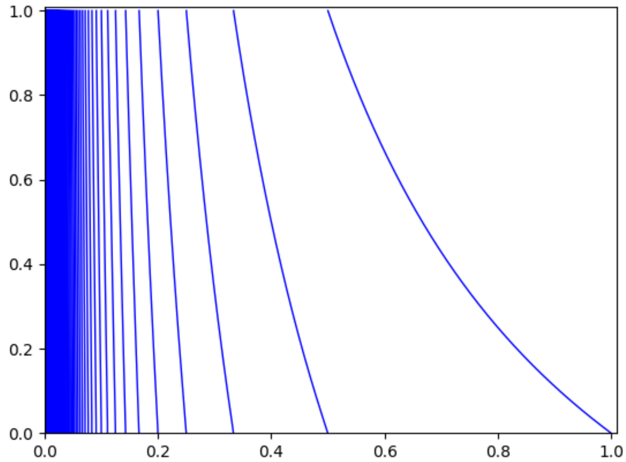
Riemann-integrierbar ist, und berechnen Sie das Integral.



Aufgabe 13. Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

integrierbar ist, wobei $\lfloor \cdot \rfloor$ die Abrundungsfunktion bezeichnet. Sie müssen das Integral nicht berechnen.



Aufgabe 14 (Recherche)**.** Finden Sie heraus, was das Integral der Funktion in Aufgabe 13 ist.

Aufgabe 15. Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F(t) = \int_a^t f|_{[a,t]} dx$$

stetig ist.

Aufgabe 16. Sei $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$, und sei $L : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion die durch

$$L(t) = \begin{cases} \int_1^t f|_{[1,t]} dx & \text{falls } t > 1, \\ 0 & \text{falls } t = 1 \\ -\int_t^1 f|_{[t,1]} dx & \text{falls } t < 1, \end{cases}$$

gegeben ist. Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 15 um zu überprüfen, dass L stetig ist. Beweisen Sie, dass für alle positiven reellen Zahlen s, t

$$L(st) = L(s) + L(t)$$

gilt. Das Resultat aus Aufgabe 10 kann dabei helfen.

Aufgabe 17. Sei $\mathcal{C}$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$, und sei $I : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Integration.

$$I(f) = \int_a^b f dx$$

Zeigen Sie, dass die Funktion I gleichmässig stetig ist, im folgenden Sinn: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f - g| < \delta \implies |I(f) - I(g)| \leq \varepsilon$$

Hier bedeutet die Aussage $|f - g| < \delta$, dass $|f(x) - g(x)| < \delta$ für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Aufgabe 18. Sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so, dass

$$(*) \qquad \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon$$

gilt.

Aufgabe 19 (Challenge)**.** Zeigen Sie, dass man in Aufgabe 18 sogar eine Polynomfunktion $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ finden kann, so, dass $(*)$ gilt.