Übungsserie 7

Abgabe bis zum 11. November
Empfohlene Aufgaben: 2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16
Bewertete Aufgaben: 3,4,(7+8)[1]

Aufgabe 1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in X$ die umgekehrte Dreiecksungleichung gilt:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Aufgabe 2. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy Folge in einem metrischen Raum (X, d). Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ genau dann konvergiert, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe 3. Sei (X, d) ein metrischer Raum und $f : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ eine Funktion, welche

- *positiv definit*, also $f(s) = 0 \Leftrightarrow s = 0$,
- *monoton wachsend*, also $f(s) \leq f(t)$ für alle $s \leq t$
- und *subadditiv* ist, also $f(s + t) \leq f(s) + f(t)$ für alle $s, t \in [0, \infty)$.

Zeigen Sie, dass dann $d'(x, y) = f(d(x, y))$ auch eine Metrik auf X definiert.
Schliessen Sie daraus, dass

$$d_1(x, y) = \sqrt{d(x, y)} \qquad \text{und} \qquad d_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

für $x, y \in X$ Metriken d_1 und d_2 auf X definieren.

Aufgabe 4. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $A \subseteq X$ und $x \in X$ definiere $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$d_A(x) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(1) A ist genau dann abgeschlossen, wenn für alle $x \in X$ mit $d_A(x) = 0$ gilt, dass $x \in A$.
(2) Die Abbildung $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

[1] Die Aufgaben 7 und 8 sind sehr kurz, zählen darum zusammen nur als eine abgegebene Aufgabe. Lesen, studieren und verwenden Sie die Aufgaben 5 und 6 wo nötig (Muss nicht bewiesen werden).

(3) Seien $A, B \subseteq X$ disjunkte, abgeschlossene Teilmengen. Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow [0,1]$ so dass

$$f(x) = 0 \iff x \in A \qquad \text{und} \qquad f(x) = 1 \iff x \in B.$$

Hinweis: Benutzen Sie Teilaufgabe (1) und (2).

Aufgabe 5 (Schreibstil)**.** Seien d_1, d_2 Metriken auf X. Eine Menge $A \subseteq X$ heisst d_i-*offen* genau dann, wenn es um jedes $x \in A$ einen offenen Ball $B_i(x,r) = \{y \in X \,|\, d_i(x,y) < \epsilon\} \subseteq A$ mit $r > 0$ gibt. Verifizieren Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq X$ ist genau dann d_1-offen, wenn sie d_2-offen ist.

(2) Für alle $x \in X$ und $r > 0$ gibt es ein $r', r'' > 0$, so dass

$$B_2(x, r') \subseteq B_1(x, r) \qquad \text{und} \qquad B_1(x, r'') \subseteq B_2(x, r).$$

(3) Die Identitätsabbildungen $(X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ und $(X, d_2) \longrightarrow (X, d_1)$ sind stetig.

Die Metriken d_1 und d_2 nennen wir dann *topologisch äquivalent.*

Aufgabe 6 (Schreibstil)**.** Seien d_1, d_2 Metriken auf X. Verifizieren Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt Zahlen $C_1, C_2 > 0$, so dass für alle $x, y \in X$

$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y)$$

gilt.

(2) Die Identitätsabbildungen $(X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ und $(X, d_2) \longrightarrow (X, d_1)$ sind beide Lipschitz stetig.

Die Metriken d_1 und d_2 nennen wir dann *streng äquivalent.* Folgern Sie, dass streng äquivalente Metriken auch topologisch äquivalent sind.

Aufgabe 7. Betrachten Sie folgende Metriken in $\mathbb{R}^2$. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ seien

(1) $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

(2) $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

(3) $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$.

Zeichnen Sie den Einheitsball $B_i(0,1) = \{y \in X \mid d_i(0,y) < 1\}$ in jeder Metrik.
Zeigen Sie, dass die Metriken d_1, d_2, d_∞ streng äquivalent sind.

Aufgabe 8. Betrachten Sie folgende Metriken in $X = (0, \infty)$. Für $x, y > 0$ seien

(1) $d_1(x,y) = |x - y|$,

(2) $d'(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.

Zeigen Sie, dass die Metriken d_1 und d' topologisch äquivalent aber nicht streng äquivalent sind.

Aufgabe 9. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte in den reellen Zahlen, falls sie existieren:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^4+15}{3n^4+n^3+n-1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n^3+n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^5-10}{n^2+1}$$

Verwenden Sie hier und auch sonst kein früher erlerntes Kochrezept, das Sie nicht begründen können.

Aufgabe 10 (Schreibstil)**.** Formulieren und beweisen Sie einen allgemeinen Satz über Grenzwerte von Folgen wie in Aufgabe 9.

Aufgabe 11. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge in $\mathbb{R}$ die durch $x_n = n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass jeder Punkt $a \in [0,1]$ ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist.
Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe 12 aus Serie 3.

Aufgabe 12. Sei X die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$d_1(f,g) := \max\{|f(x)-g(x)| \mid x \in [0,1]\} \qquad \text{und} \qquad d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$$

Metriken d_1 und d_2 auf X definieren. Für welche dieser Metriken konvergiert die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $f_n(x) = x^n$? Benutzen Sie für letztere Frage ohne Beweis, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $a < b$ die Gleichung

$$(*) \qquad \int_a^b x^n dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$$

gilt.

Aufgabe 13 (Schreibstil)**.** Geben Sie einen möglichst kurzen und eleganten Beweis der Formel $(*)$ aus Aufgabe 12.

Aufgabe 14. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$ gilt. Sei X die Teilmenge $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ gerade die Häufungspunkte der Menge X sind.

Aufgabe 15. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $F \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Zeigen Sie, dass F abgeschlossen ist.

Aufgabe 16. Sei X eine Menge, und sei d die sogenannte <u>diskrete</u> Metrik auf X, gegeben durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

für alle $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in X genau dann konvergiert, wenn sie schliesslich konstant ist.

Aufgabe 17 (Schreibstil)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definieren Sie den Begriff offener Teilmengen von X, und illustrieren Sie Ihre Definition an verschiedenen sinnvollen Beispielen.

Aufgabe 18. Sei X die Menge aller stetigen Funktionen $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei d die durch

$$d(f,g) = \int_0^2 |f(x) - g(x)| dx$$

gegebene Metrik auf X. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $f_n(x) = \min\{x^n, 1\}$ eine Cauchy-Folge ist, aber nicht konvergiert. Benutzen Sie $(*)$ aus Aufgabe 12.

Aufgabe 19 (Recherche)**.** Wir möchten zeigen, dass die durch $x_n = n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ gegebene Folge reeller Zahlen aus Aufgabe 11 in gewisser Weise gleichmässig auf $[0,1]$ verteilt ist. Versuchen Sie zuerst selbst eine Definition von gleichmässig verteilt zu geben. Lesen Sie anschliessend §1 (die ersten 5 Seiten) von Hermann Weyl's Artikel [W16].

Literatur

[W16] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Mathematische Annalen **77**, p. 313-352 (1916).