Übungsserie 8

Abgabe bis zum 18. November
Empfohlene Aufgaben: 2,5,6,7,8,10,12
Bewertete Aufgaben: 5,6,7

Aufgabe 1. Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(|z_n|)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und geben Sie den Grenzwert an. Impliziert umgekehrt die Konvergenz von $(|z_n|)_{n=0}^{\infty}$ die Konvergenz von $(z_n)_{n=0}^{\infty}$?

Aufgabe 2. Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn $(\mathrm{Re}(z_n))_{n=0}^{\infty}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n=0}^{\infty}$ beides Cauchy-Folgen sind.

Aufgabe 3 (Schreibstil)**.** Schreiben Sie einen Beweis der folgenden Proposition, die wir bereits für Folgen reeller Zahlen im Kurs gesehen haben.

Proposition. *Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$ mit Grenzwert $C \neq 0$. Gilt $z_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Folge der Kehrwerte $(z_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$, und ihr Grenzwert is C^{-1}.*

Wir haben im Beweis die Stetigkeit der Inversion $x \longmapsto x^{-1}$ von $\mathbb{R}^{\times}$ nach $\mathbb{R}^{\times}$ benutzt. Ein guter Ansatz wäre, sich zu überlegen durch welche Aussage über komplexe Zahlen man dies ersetzen könnte.

Aufgabe 4. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} nz^n = 0$ gilt.

Aufgabe 5. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ die durch $x_0 = 1$ und

$$x_n = \frac{2}{3}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)$$

für $n \geq 1$ rekursiv definierte Folge. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 6. Sei $(x_n)_{n=0}^\infty$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen, so dass $(x_{n+1} - x_n)_{n=0}^\infty$ gegen 0 konvergiert. Setze

$$A = \liminf_{n\to\infty} x_n \qquad \text{und} \qquad B = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$ das Intervall $[A, B]$ ist. Konstruieren Sie ein Beispiel solch einer Folge mit $[A, B] = [0, 1]$.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass sich der Limes superior nicht mit Addition kommutiert. Genauer, seien $(x_n)_{n=0}^\infty$ und $(y_n)_{n=0}^\infty$ beschränkte Folgen. Zeigen Sie, dass zwar

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n,$$

aber Gleichheit nicht immer gelten muss.

Aufgabe 8. Sei $(z_n)_{n=1}^\infty$ eine konvergente Folge in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die Folge der **Cesàro-Mittel** $(w_n)_{n=1}^\infty$, gegeben durch

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$$

für $n \geq 1$ konvergiert, und denselben Grenzwert wie $(z_n)_{n=0}^\infty$ hat. Überzeugen Sie sich auch davon, dass die umgekehrte Implikation nicht gilt, das heisst, dass die Konvergenz der Cesàro-Mittel nicht Konvergenz der Folge impliziert.

Aufgabe 9. Seien $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=0}^\infty$ und $(c_n)_{n=0}^\infty$ konvergente Folgen reeller Zahlen, mit Grenzwerten A, B und C respektive. Sei $(x_n)_{n=0}^\infty$ die Folge definiert durch

$$x_n = \begin{cases} a_n & \text{falls } 3|n \\ b_n & \text{falls } 3|n-1 \\ c_n & \text{falls } 3|n-2 \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} x_n$, $\liminf_{n\to\infty} x_n$ und die Menge der Häufungspunkte der Folge $(x_n)_{n=0}^\infty$.

Aufgabe 10. Sei $(x_n)_{n=0}^\infty$ die Folge reeller Zahlen, rekursiv definiert durch $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$. Berechnen Sie $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$. Konvergiert die Folge? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert. Was passiert, wenn man $x_0 = A$ für eine andere reelle Zahl $A > 0$ setzt?

Aufgabe 11. Sei $(F_n)_{n=0}^\infty$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und rekursiv $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ die Folge reeller Zahlen gegeben durch

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

Berechnen Sie $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Konvergiert die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 12. Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x \geq 0$ die Ungleichung

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq \exp(x)$$

gilt. Zeichnen Sie die Graphen der entsprechenden Funktionen.

Aufgabe 13. Sei $\alpha > 0$ eine positive Zahl. Zeigen Sie, dass eine reelle Zahl $C_\alpha > 0$ existiert, derart, dass $\log(x) \leq C_\alpha x^\alpha$ für alle $x > 0$ gilt.

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x > -1$ und $p \geq 1$ die stetige Bernoulli Ungleichung

$$(1 + x)^p \geq 1 + px.$$

gilt.

Aufgabe 15 (Challenge)**.** Sei $z \in \mathbb{C}$. Konvergiert die Folge $(a_n)_{n=0}^\infty$ gegeben durch

$$a_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad ?$$

Aufgabe 16 (Challenge)**.** Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Zeichnen Sie den Graphen. Was ist das Maximum der Funktion f, und an welcher Stelle wird es erreicht?