Übungsserie 9

Abgabe bis zum 25. November
Empfohlene Aufgaben: 1,2,4,5,7,11
Bewertete Aufgaben: 4[1],5,7

Benutzen Sie beim Lösen aller Aufgaben ausschliesslich die im Kurs eingeführten Mittel, und nicht irgendwelche Kochrezepte die Sie vielleicht aus dem Gymnasium kennen. In den Aufgaben 6 und 8 bezeichnet $\mathbb{R}[T]$ den Ring der Polynome in der Variablen T mit Koeffizienten im Körper $\mathbb{R}$. Stellen Sie sicher, dass Sie den Unterschied zwischen einem Polynom $p \in \mathbb{R}[T]$ und der durch p definierten Funktion $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $x \longmapsto p(x)$ verstehen.

Aufgabe 1. Sei $a \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, falls sie existieren. Wählen Sie dabei in jedem Fall einen geeigneten Definitionsbereich, auf dem die angegebene Formel eine Funktion definiert.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\neq 2}} \frac{x^3-x^2-x-2}{x-2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{2x}+e^x+1}{2e^{2x}-1}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^a}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a}$$

Aufgabe 2. Finden Sie ein Beispiel für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass der Grenzwert der Folge $(f(n))_{n=0}^{\infty}$ existiert, aber nicht der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Wie übersetzt man für eine reelle Zahl A die Aussage

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

korrekt in eine Aussage über Konvergenz von Folgen? Beweisen Sie!

Aufgabe 3. Stellen Sie eine Sammlung von Funktionsgraphen zusammen, die die verschiedenen Grenzwerte in den Tabellen 1,2,3,4 im Paragraph 6.110 aus dem Skript illustrieren. Geben Sie ebenfalls Beispiele in denen diese Grenzwerte nicht existieren.

Aufgabe 4. (Eindeutige Charakterisierung der Exponentialfunktion) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

(1) $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,
(2) $f(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

[1] Die Aufgabe 4 zählt als 2 abgegebene Aufgaben (also 22 Punkte), da sie etwas länger ist.

Zeigen Sie, dass f die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sein muss.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass jede Polynomfunktion $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von ungeradem Grad eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 6. Seien $p, q \in \mathbb{R}[T]$ Polynome, mit $q \neq 0$. Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Nullstellen von pq. Wir betrachten die Funktion $x \longmapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ auf $\mathbb{R} \setminus X$. Beschreiben Sie, wie man die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

für $x_0 \in X$ berechnet. An welchen Punkten $x_0 \in X$ kann man $\frac{p}{q}$ stetig fortsetzen? Welche Punkte $x_0 \in X$ sind Sprungstellen?

Aufgabe 7. Seien $a, b \geq 0$ reelle Zahlen. Seien (a_n) und (b_n) Folgen definiert durch $a_0 = a, b_0 = b$ und für $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

Zeigen Sie, dass die Folgen (a_n) und (b_n) konvergieren und denselben Grenzwert haben[2].

Aufgabe 8. Sei $p \in \mathbb{R}[T]$ ein Polynom, $p(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0$. Zeigen Sie, dass ein Polynom $q \in \mathbb{R}[T]$ existiert, so dass

$$q(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{p(x) - p(x_0)}{x - x_0}$$

für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Betrachten Sie zuerst den Spezialfall $p(T) = T^n$, und schliessen Sie auf den allgemeinen Fall in dem Sie die Linearität des Grenzwertes ausnutzen.

Aufgabe 9 (Recherche)**.** Definieren Sie die **Primzahlfunktion** $\pi : \mathbb{R}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\pi(x) = |\{p \in \mathbb{N} \mid \ p \text{ ist eine Primzahl und } p \leq x\}$$

Was kann man über das asymptotische Verhalten der Primzahlfunktion für $x \longrightarrow \infty$ sagen? Was besagt der Primzahlsatz? Der **Integrallogarithmus** $\mathrm{Li} : \mathbb{R}_{\geq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist die Funktion definiert durch

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$$

Versuchen Sie zu zeigen, dass

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} \mathrm{Li}(x) = 1$$

[2] Sie müssen nur Gleichheit des Grenzwertes zeigen, den Grenzwert also nicht unbedingt explizit ausrechnen.

gilt, und formulieren Sie den Primzahlsatz mit Hilfe des Integrallogarithmus. Die berühmte **Riemann Hypothese** ist äquivalent zur Aussage

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(\sqrt{x} \cdot \log(x)).$$

Wie ist diese Aussage zu verstehen? Formulieren Sie aus, was die Landau Notation hier genau bedeutet.

Aufgabe 10. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, und es bezeichne $\mathcal{N}$ die Menge aller Normen auf V. Zeigen Sie, dass Äquivalenz von Normen tatsächlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\mathcal{N}$ definiert.

Aufgabe 11. Sei V der Vektorraum aller beschränkten Folgen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$. Überprüfen Sie, dass

$$\|(x_n)_{n=0}^{\infty}\|_\infty = \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{und} \qquad \|(x_n)_{n=0}^{\infty}\|_* = \sup\{2^{-n}|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Normen $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_*$ auf V definieren. Zeigen Sie, dass diese beiden Normen nicht äquivalent sind. Finden Sie eine Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ in V, die für die Norm $\|\cdot\|_*$ konvergiert, aber nicht für die Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 12 (Schreibstil)**.** Beweisen Sie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung in dem Sie folgt vorgehen: Es seien Vektoren v und w in $\mathbb{R}^n$ gegeben.

(1) Zeigen Sie, dass $f(x) = \|v + xw\|^2$ als ein Polynom von Grad 2 in x mit reellen Koeffizienten aufgefasst werden kann und finden Sie dazu die Koeffizienten.
(2) Das Polynom $f(x) = ax^2 + bx + c$ nimmt nur nicht-negative Werte an, und hat damit höchstens eine reelle Nullstelle. Folgern Sie, dass die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ von f nicht-positiv ist.
(3) Berechnen Sie die Diskriminante von f.

Aufgabe 13. Sei $a > 0$ eine reelle Zahl, und seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass die Abschätzung

$$|\langle v, w\rangle| \leq \tfrac{a^2}{2}\|v\|^2 + \tfrac{1}{2a^2}\|w\|^2$$

gilt. Schliessen Sie daraus auf die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

Aufgabe 14. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0.99 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 19.99 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist $x = y = 10$. Was passiert mit der Lösung wenn man 0.99 in der Matrix linkerhand durch 1.001 ersetzt. Formulieren Sie Ihre Beobachtung in dem Sie den Begriff des uneigentlichen links- und rechtsseitigen Grenzwertes benutzen. Beweisen Sie! Was bedeutet das für eine Anwendung, in der die Matrixeinträge physikalische Messwerte darstellen?

Aufgabe 15 (Challenge). Sei $\mathcal{C} = \mathcal{C}[0,1]$ der Ring der stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir können $\mathcal{C}$ auch als Vektorraum über $\mathbb{R}$ betrachten, und in diesem Sinne die durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

gegebene Norm auf $\mathcal{C}$. Überprüfen Sie, dass für jedes $t \in [0,1]$ die Abbildung

$$a_t : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad a_t(f) = f(t)$$

die Abbildung a_t sowohl stetig, als auch ein Ringhomomorphismus ist. Zeigen Sie, dass es für *jeden* stetigen Ringhomomorphismus $a : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein eindeutiges $t \in [0,1]$ gibt, mit $a = a_t$.