Übungsserie 10

Abgabe bis zum 2. Dezember
Empfohlene Aufgaben: 2, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 15, 17
Bewertete Aufgaben: 6, 8, 11

Aufgabe 1. Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$, und sei $d \geq 0$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie dass die Abbildung $\|\cdot\|_{(d)} : V \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\|f\|_{(d)} = \Big(\int_0^1 x^d f(x)^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm auf V ist. Zeigen Sie, dass für $d \neq d'$ die Normen $\|\cdot\|_{(d)}$ und $\|\cdot\|_{(d')}$ nicht äquivalent sind.

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, sei $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion und sei $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \Longleftrightarrow \quad A = \sup\left\{ \sum_{s\in S} a_s \;\middle|\; S \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich}\right\}$$

und folgern Sie daraus

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \Longleftrightarrow \quad A = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

Vergleichen Sie dies mit dem Umordnungssatz für absolut konvergierende Reihen.

Aufgabe 3. Sei K eine Menge, und für jedes $k \in K$ sei a_k eine nichtnegative reelle Zahl. Definieren Sie $A \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ durch

$$A = \sup\left\{ \sum_{s\in S} a_s \;\middle|\; S \subseteq K \text{ endlich}\right\}.$$

Zeigen sie, dass

$$A < \infty \implies \{k \in K \mid a_k \neq 0\} \text{ ist abzählbar.}$$

gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N}_{>0} \longrightarrow \mathbb{N}_{>0}$ existiert, so dass gilt:

$$9001 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\varphi(n)}}{\varphi(n)}.$$

Aufgabe 5. Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schreiben Sie einen detaillierten Beweis für die Aussage:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergiert } \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 6. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 \leq a_n$, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ konvergiert.

Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen komplexer Zahlen konvergieren, und berechnen Sie die Grenzwerte. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Wolframalpha.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ für eine komplexe Zahl z mit $|z| < 1$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1} + 1}{3^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ für $k \in \mathbb{N}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}$

Aufgabe 8. Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren oder divergieren. Berechnen Sie den Grenzwert, falls die Reihe konvergiert.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^n)}{e^n}$

Aufgabe 9. Entscheiden Sie, welche der folgenden Reihen komplexer Zahlen konvergieren. Wo möglich, fragen Sie Wolframalpha nach den Grenzwerten.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n(-1)^n}{(2n)!}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(\tfrac{n}{n+1})$ (k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n)^n}$ (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{n}{n+1})^{n^2}$

(m) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \tfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell(n)}}{n}$ (o) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{(\sqrt{2})^n \log(n)}$ (p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-2})$

In (g) steht F_n für die n-te Fibonacci Zahl, also $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ und so weiter, rekursiv $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. In (n) steht $\ell(n)$ für die grösste natürliche Zahl m mit der Eigenschaft $10^m \leq n$, also $\ell(n) = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor$.

Aufgabe 10. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert.}$$

Aufgabe 11. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen mit $0 \le a_n$ und a_n monoton fallend, und so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeige, dass dann

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0$$

gilt. Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 10.

Aufgabe 12. Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Benutzen Sie Aufgabe 10 um zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert.

Aufgabe 13 (Challenge)**.** Für $n \ge 1$ bezeichne p_n die n-te Primzahl, also $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$. Zeigen Sie, dass die folgende Reihe (hier in zwei alternativen Notationen gegeben) divergiert.

$$\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

Sie können daraus folgern, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Das Resultat geht auf Leonhard Euler (1737) zurück.

Aufgabe 14. Sei V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei $\|\cdot\|_\infty$ die durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$$

gegebene Norm auf V. Sei $f_n \in V$ die Funktion $f_n(x) = (x+3)^{-n}$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

konvergiert, und geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe 15. Sei V der Vektorraum der 2×2-Matrizen mit reellen Koeffizienten. Sei $A \in V$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} A^n$$

konvergiert. Verallgemeinern Sie das Resultat für $d \times d$ Matrizen.

Aufgabe 16 (Challenge)**.** Für reelle Zahlen a und x berechnet Euler a^x nach folgendem Rezept: Schreibe $a - 1 = b$ und wende den binomischen Lehrsatz auf $(1+b)^x$ an - was auch immer das bedeuten mag:

$$a^x = (1+b)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} b^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} b^n$$

Für welche a, x können Sie zeigen, dass die Reihe rechts konvergiert? Falls sie konvergiert, ist der Grenzwert wirklich die reelle Zahl $a^x = \exp(x\log(a))$? Was passiert wenn x eine ganze Zahl ist?

Aufgabe 17. Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen die gegen 0 konvergiert. Wir definieren

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+a_k)$$

im gleichen Sinn wie auch Reihen. Zeigen Sie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n) \text{ konvergiert, mit Grenzwert} \neq 0.$$

Hinweis: Beweisen und benutzten Sie, dass $\frac{1}{2}x \leq \log(1+x) \leq x$ für genügend kleine $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt.

Aufgabe 18. Sei $s > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie die **Euler'sche Produktformel**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

Begründen Sie alle Reihenumformungen. Hinweis: Begründen Sie mit Aufgaben 12 und 17, dass die Reihe und das unendliche Produkt überhaupt konvergieren. Rufen Sie sich dann die geometrische Reihe in Erinerung, und verwenden Sie geschickt den Hauptsatz der Arithmetik.

Aufgabe 19 (Recherche)**.** Seien s und t ganze Zahlen mit $s \geq 2$ und $t \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Reihen

$$\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad \text{und} \qquad \zeta(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{n^s m^t}$$

konvergieren. Man nennt die Werte dieser Reihen **Multizetawerte**. Die verschiedenen algebraischen Relationen zwischen solchen Multizetawerten sind bis heute nicht vollständig geklärt, und Gegenstand mathematischer Forschung. Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:

$$\zeta(3) = \zeta(2,1) \qquad \text{und} \qquad \zeta(3)\zeta(3) = 2\zeta(3,3) + \zeta(6).$$

Begründen Sie alle Reihenumformungen. Können Sie noch weitere ähnliche Relationen finden?