Übungsserie 11

Abgabe bis zum 9. Dezember
Empfohlene Aufgaben: 1, 4, 5, 6, 8, 14, 15, 16
Bewertete Aufgaben: 5, 14[1], 15[1]

Aufgabe 1. Sei $B := B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$, und für $n \geq 0$, sei $f_n : B \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$. Sei $f : B \longrightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = (1-z)^{-1}$. Erklären Sie detailliert was die folgenden Aussagen bedeuten, und beweisen Sie:

(1) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert punktweise gegen f.
(2) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert nicht gleichmässig gegen f.
(3) Sei $r < 1$ eine reelle Zahl, und $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Die Folge von Funktionen $(f_n|_D)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gleichmässig gegen $f|_D$.

Aufgabe 2. Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und V der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die durch

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$$

gegebene Norm auf V. Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in V und $f \in V$. Zeigen Sie dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gleichmässig gegen f.
(2) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen f bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 3. Sei $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge beschränkter, komplexwertiger Funktion auf einer Menge D. Zeigen Sie, dass falls $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmässig gegen eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ strebt, dann ist auch f beschränkt. Finden Sie ein auch Beispiel in dem die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ punktweise gegen eine unbeschränkte Funktion strebt.

Aufgabe 4. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge gleichmässig stetiger, komplexwertiger Funktionen auf D, die gleichmässig gegen $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ strebt. Zeigen Sie, dass f gleichmässig stetig ist.

[1]Benutzen Sie für diese Aufgaben nur die Eigenschaften von sin, cos, exp, welche explizit im Skript bewiesen worden sind. Verweisen Sie jeweils korrekt auf die aus dem Skript verwendeten Eigenschaften.

Aufgabe 5. Seien $(f_n)_{n=0}^\infty$, $(g_n)_{n=0}^\infty$ zwei Folgen komplexwertiger Funktion auf einer Menge D, welche gleichmässig gegen Funktionen $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergieren.

(1) Zeigen Sie, dass falls alle f_n beschränkt sind sowie g beschränkt ist, die Funktionenfolge $(f_n g_n)_{n=0}^\infty$ gleichmässig gegen $fg : D \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiert.[2]

(2) Finden Sie ein Beispiel, in dem die Funktionen f_n unbeschränkt sein können und $(f_n g_n)_{n=0}^\infty$ nicht gleichmässig gegen $fg : D \longrightarrow \mathbb{C}$ konvergiert.

Aufgabe 6. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge gleichmässig stetiger, komplexwertiger Funktionen auf D, die gleichmässig gegen $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ strebt. Sei $(z_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in D die gegen $z \in D$ konvegiert. Zeigen Sie dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_n) = f(z) \tag{1}$$

gilt. Finden Sie ein Beispiel das zeigt, dass punktweise Konvergenz von $(f_n)_{n=0}^\infty$ gegen f nicht genügt um (1) zu folgern.

Aufgabe 7. Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1})^n}{n^2} T^n$$

und zeigen Sie Konvergenz der Potenzreihe bei den Punkten $-R, R \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 8. Sei $z \neq 1$ eine komplexe Zahl mit $|z| = 1$. Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}$$

konvergiert.

Aufgabe 9. Sei $f(T) = \sum_{n=0}^\infty a_n T^n \in K[\![T]\!]$ eine Potenzreihe mit Koeffizienten in einem Körper K. Zeigen Sie, dass genau dann eine Potenzreihe $g(T) \in K[\![T]\!]$ mit $f(T)g(T) = 1$ existiert, wenn $a_0 \neq 0$ gilt.

Aufgabe 10. Zeigen Sie: $\sin(\frac{2\pi}{5}) = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Aufgabe 11. Berechnen Sie ohne Maschinenhilfe die reelle Zahl

$$\sin(1) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

bis auf zwei dezimale Nachkommastellen genau. Begründen Sie im Detail, warum Ihre Rechnung funktioniert.

[2] Sie können Aufgabe 3 ohne Beweis verwenden. Analysieren Sie auch den Beweis von Proposition 4.49 (Multiplikation stetiger Funktionen gibt stetige Funktion).

Aufgabe 12. Seien $a < b$ eine reelle Zahlen. Beweisen Sie, dass

$$\int_a^b \sin(t)dt = -\cos(b) + \cos(a) \qquad \text{und} \qquad \int_a^b \cos(t)dt = \sin(b) - \sin(a)$$

gilt.

Aufgabe 13. Sei c eine komplexe Zahl, und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ die durch $f(t) = \exp(cx)$ gegebene Funktion. Zeigen Sie, dass f ableitbar ist, und berechnen Sie die Ableitung f' von f. Folgern Sie aus dem Spezialfall $c = i$, dass

$$\tfrac{\partial}{\partial t} \sin(t) = \cos(t) \qquad \text{und} \qquad \tfrac{\partial}{\partial t} \cos(t) = -\sin(t)$$

gilt.

Aufgabe 14. Zeigen Sie, dass die Nullstellen von $\sin : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ genau die Punkte in $\pi\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ sind und dass die Nullstellen von $\cos : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ genau die Punkte in $\pi\mathbb{Z} + \frac{\pi}{2}$ sind.

Aufgabe 15. Zeigen Sie die Formel

$$\sin(z) - \sin(w) = 2 \sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \cos\left(\frac{z+w}{2}\right)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
Verwenden Sie dies, um zu zeigen, dass der Sinus $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ strikt monoton wachsend und bijektiv ist.

Aufgabe 16. Wir schreiben $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

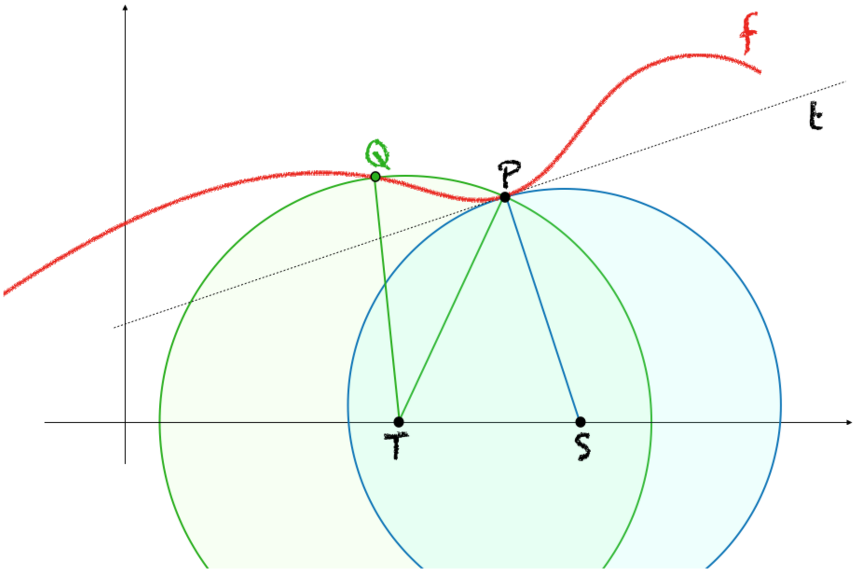
(1) Sei c eine komplexe Zahl. Bestimmen Sie die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = c\}$.
(2) Angenommen $c \neq 0$. Zeigen Sie, dass es genau eine komplexe Zahl z gibt, mit

$$-\pi < \operatorname{Im}(z) \leq \pi \qquad \text{und} \qquad \exp(z) = c.$$

Die Funktion $\mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ die $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die in (2) charakterisierte eindeutige Zahl z zuordnet, heisst **Hauptzweig** des komplexen Logarithmus.

(3) Zeigen Sie, dass der Hauptzweig des komplexen Logarithmus nicht stetig ist, und bestimmen sie die Unstetigkeitsstellen.
(4) Erklären Sie zunächst informell, warum es keine stetige Funktion $L : \mathbb{C}^\times \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, mit $\exp(L(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}^\times$. Anschliessend, beweisen Sie diese Aussage.

Aufgabe 17 (Schreibstil)**.** Die Definition der Ableitung als ein Grenzwert geht auf die Arbeiten von Newton und Leibnitz zurück. Tangenten an Kurven konnte man aber schon vorher berechnen. Die zu Newtons Lebzeiten übliche Methode war die folgende: Angenommen wir haben einen Punkt P auf einer Kurve f:



Dann betrachten wir einen Kreis mit Zentrum T auf der x-Achse der durch den Punkt P läuft. Typischerweise wird dieser Kreis die Kurve f in einem Weiteren Punkt Q schneiden. Der Punkt Q hängt von der Wahl von T ab, also wenn wir T bewegen, so bewegt sich auch Q. Wir verschieben nun den Punkt T auf der x-Achse soweit bis $Q = P$ gilt – nach links bis zur Stelle S im Bild. Die gesuchte Tangente an f ist dann gerade die Tangente im Punkt P an den Kreis, für die wir eine explizite Formel angeben können.
Noch bis ins 18. Jahrhundert unterschied man zwischen zwei Klassen von Kurven: **Rationale Kurven**, dazu gehören insbesondere Graphen von Polynomen, und sogenannte **mechanische Kurven**. Für letztere gibt es keine präzise Definition, aber es ist klar was damit gemeint ist - Bahnen von Punkten die man aus mechanischen Bewegungen erhält, etwa den Weg den ein Punkt auf einem Rad zurücklegt, wenn das Rad auf einer Geraden abrollt. Die oben erklärte Methode zum Finden von Tangenten funktioniert recht gut für rationale Kurven, und ist im Allgemeinen nicht konkret durchführbar für mechanische Kurven. Es war deshalb ein fundamentales Problem im 17. Jahrhundert, Tangenten an mechanische Kurven zu berechnen. Newton's erstes Manusktipt über Differentialrechnung (8. November 1665) hat denn auch den Titel *How to Draw Tangents to Mechanicall Lines* (sic.).

(1) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch $f(x) = 3x^2 + 2x - 2$ gegebene Funktion. Finden Sie die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(1, 3)$ mit Hilfe der Kreismethode, und überprüfen Sie das Resultat mit Hilfe moderner Differentialrechnung.
(2) Versuchen Sie dasselbe mit der Funktion $f(x) = 3 + |x - 1|$.
(3) Die Kreismethode funktioniert auch für differenzierbare Funktionen nicht immer reibungslos. Zeigen Sie anhand von Beispielen, welche Probleme auftauchen können.