Übungsserie 12

Abgabe bis zum 16. Dezember
Empfohlene Aufgaben: 6, 7, 8, 9, 10, 12
Bewertete Aufgaben: (7,8)[1], 9, 10

Aufgabe 1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge ohne isolierte Punkte, und seien $f, g \in C^n(D)$. Erklären Sie, warum $fg \in C^n(D)$ gilt, und zeigen Sie

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \, .$$

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass die Funktion $\log : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, und dass $\log'(x) = \frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

Aufgabe 3. Sei a eine komplexe Zahl, und $f : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{C}$ die durch $f(x) = x^a$ gegebene Funktion. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist, und dass $f'(x) = ax^{a-1}$ gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass es keine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass $f'(x) = \operatorname{sgn}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5. Für eine fixe reelle Zahl a betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie für welche Wahl von $a \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig, ableitbar, oder sogar stetig ableitbar ist. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist f von Klasse C^n, für $n = 2, 3, 4, \ldots$?

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

[1] Zählt als eine Aufgabe

eine glatte Funktion ist, also $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Finden Sie mit einer ähnlichen Konstruktion für beliebige reelle Zahlen $a < b < c < d$ eine glatte Funktion φ auf $\mathbb{R}$, so dass φ gleich Null ist ausserhalb des Intervalls (a, d) und gleich 1 ist auf dem Intervall $[b, c]$.

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, derart, dass $f(x) = f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie, dass eine eindeutige reelle Zahl c existiert, mit $f(x) = c \cdot \exp(x)$.

Aufgabe 8. Wir betrachten die Menge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 2\}$ und die lineare Abbildung

$$L : C^1(D) \longrightarrow C^0(D)$$

gegeben durch $L(f) = f'$.

(1) Bestimmen Sie den Kern von L, finden Sie eine Basis.
(2) Beschreiben Sie alle Funktionen $f \in C^1(D)$ für die $L(f) = f$ gilt.

Aufgabe 9. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass jedes lokale Minimum von f ein globales Minimum ist.

Aufgabe 10. Seien $p, q > 1$ reelle Zahlen, welche $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ erfüllen. Beweisen Sie, dass für alle nichtnegative reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

gilt.
Hinweis: Definieren Sie eine geeignete Funktion und bestimmen Sie ihr Minimum.

Aufgabe 11. Seien $a < b$ reelle Zahlen. Formulieren und beweisen Sie die Regel von l'Hôpital für den Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

falls $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ gilt. Illustrieren Sie mit einem Beispiel.

Aufgabe 12. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von l'Hôpital's Regel.

(a) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(x) - x}{x^2 \sin(x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos x - 1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin \pi x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} x^3 e^x$ (e) $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Aufgabe 13. Sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Wenn $M \geq 0$ derart, dass $|f'(x)| \leq M\,|f(x)|$ für alle $x \in [0, 1]$ existiert, dann zeigen Sie $f(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

Aufgabe 14 (Challenge)**.** Finden Sie alle Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass f^2 ableitbar ist und $(f^2)' = f$ gilt.

Aufgabe 15. Finden Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

(i) $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}$

(ii) $f'(x) = 0 \implies f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 16. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, 1]$ mit $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$. Zeigen Sie, dass

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n)$$

gilt. Diese Ungleichung heisst **Jensen'sche Ungleichung**. Folgern Sie daraus, dass für beliebige positive reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Ungleichungen

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \cdots + \frac{n}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

gelten.

Aufgabe 17. Wir definieren die **Tangensfunktion** $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Zeigen Sie, dass die Tangensfunktion streng monoton steigend und bijektiv ist. Die entsprechende inverse Funktion

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

heisst **Arcustangens**. Finden Sie die Ableitung des Arcustangens.

Aufgabe 18. Wir definieren den **Sinus hyperbolicus** $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\sinh(x) = -i \sin(ix) = \tfrac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$$

Überprüfen Sie letztere Gleichung, und zeigen Sie, dass der Sinus hyperbolicus streng monoton steigend und bijektiv ist. Die entsprechende inverse Funktion

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heisst **Areasinus hyperbolicus**. Finden Sie die Ableitung davon.

Aufgabe 19 (Recherche, Fortsetzung zu Aufgabe 7 Serie 9)**.** Seien a und b nichtnegative reelle Zahlen. Man nennt $\frac{1}{2}(a+b)$ das arithmetische Mittel, und $\sqrt{ab}$ das geometrische Mittel von a und b. Dabei gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$ nach Aufgabe 16. Das arithmetisch-geometrische Mittel oder AGM von a und b ist wie folgt definiert: man setzt $a_0 = a$, $b_0 = b$, und definiert rekursiv

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

für alle $n \geq 1$. Wir haben in Aufgabe 7 Serie 9 bewiesen, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren. Dieser Grenzwert ist das AGM von a und b. Was hat es mit der Identität von Gauss

$$\mathrm{AGM}(\sqrt{2}, 1) \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt = \frac{\pi}{2}$$

auf sich? Können Sie die beweisen? Wie benutzt man das AGM um die Zahl π effizient numerisch zu berechnen?