Übungsserie 13

Nicht zur Abgabe.
Empfohlene Aufgaben: 1,2,12

Aufgabe 1. Auf der letzten Seite finden Sie eine Sammlung von bestimmten Integralen. Üben Sie das Integrieren solange, bis sie diese im Schnitt in 20 Minuten berechnen können. Bei Unsicherheit überprüfen Sie Ihr Resultat mit Wolframalpha.

Aufgabe 2. Zeigen Sie

$$\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}dt=\log(3).$$

Aufgabe 3. Sei $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $f(x)=e^{-x^2}$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Stammfunktion $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ von f mit $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$ existiert. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to\infty}\frac{F(x)}{\frac{1}{2x}e^{-x^2}}.$$

Aufgabe 4. Seien $a<b$ reell, und seien $f,g:[a,b]\to[0,\infty)$ stetige Funktionen, derart, dass

$$f(x)\le f(a)+\int_a^x f(t)g(t)dt$$

für alle $x\in[a,b]$ gilt. Zeigen Sie die **Grönwall Ungleichung**:

$$f(x)\le f(a)\exp\left(\int_a^x g(t)dt\right)\qquad\text{für alle } x\in[a,b].$$

Aufgabe 5. Für $n\in\mathbb{N}$ definieren wir eine Funktion $I_n:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ durch

$$I_n(x)=\int_{-1}^1\frac{(1-t^2)^n}{n!}e^{xt}dt.$$

Zeigen Sie, dass es für jedes $n\ge 0$ ein Polynom P_n von Grad n gibt, so dass

$$I_n(x)=\frac{1}{x^{2n+1}}\left(e^xP_n(x)-e^{-x}P_n(-x)\right)$$

gilt. Folgern Sie daraus, dass für jede reelle Zahl $x \neq 0$ mindestens eine der beiden Zahlen $\{x, e^x\}$ irrational ist.

Aufgabe 6. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ definiert man

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx. \tag{1}$$

Überprüfen Sie, dass das Integral 1 für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ konvergiert. Zeigen Sie dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 0$ die Funktionalgleichung

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2}$$

gilt. Verwenden Sie anschliessend die Funktionalgleichung um für ganze Zahlen n rekursiv $\Gamma(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ mit $\mathrm{Re}(z) > n$ zu definieren, so dass schliesslich $\Gamma(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ definiert ist, und (2) auf dem ganzen Definitionsbereich erfüllt.

Aufgabe 7. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\sqrt{\log x}} \left(\sqrt{\log x}\right)^x}{\sqrt{x}^{\log x} (\log x)^{\sqrt{x}}}.$$

Aufgabe 8 (Lektüre)**.** Finden und lesen Sie den Artikel von David Hilbert, *Über die Transzendenz der Zahlen* e *und* π, Math. Annalen **43**, 216-219 (1893). Hier zeigt Hilbert, wie man mit Hilfe uneigentlicher Integrale und der Gamma Funktion zeigen kann, das $e = \exp(1)$ und π nicht nur irrational, sondern sogar transzendent sind.

Aufgabe 9 (Challenge)**.** Zeigen Sie: $\displaystyle\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^n}$.

Lösung: Hier

Aufgabe 10 (Weihnachtsaufgabe)**.** Finden Sie alle Funktionen $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen. (Shortlist IMO, 2013)

Lösung: Hier A5

Aufgabe 11 (Weihnachtsaufgabe)**.** Sei $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine bijektive Funktion. Angenommen, die Folge $(x_n)_{n=1}^\infty$ gegeben durch

$$x_n = \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ gilt (Romanian Mathematics National Competition *Calude*, 2000).

Aufgabe 12. Machen Sie sich mit folgenden Methoden vertraut, um Grenzwerte zu berechnen

- Addition, Multiplikation, Division von Grenzwerten
- Faktorisieren
- Stetige Funktion mit Limes vertauschen
- Sandwich
- Substituieren
- l'Hôpital Regel
- Taylor Reihe
- Zurückführen auf bekannte Limits
- Konjugation: $a - b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$
- $a^b = \exp(b \log a)$ für $a > 0$
- Rekursiv definierte monotone Folge (siehe A5, A10 aus Serie 8)

und lösen Sie die Aufgaben (auf möglichst verschiedene Weise).

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\arctan(\exp(n^2)-1)}{n}$

(4) $a_0 = 2, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ (5) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ (6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\exp\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x} - x\right)$ (8) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin x}$ (9) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{4}{x}}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x)^x$ (11) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (12) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^{\frac{1}{x}} + x^{-\frac{1}{x}}\right)$.

(1) $\int_0^3 \exp(\sqrt{x+1})dx$

(2) $\int_0^{n/3} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)+\tan^2(x)}dx$

(3) $\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)dx$

(4) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1}$

(5) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}dx$

(6) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(7) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}dx$

(8) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(2x)dx$

(9) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

(10) $\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$

(11) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$

(12) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$

(13) $\int_7^{26} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$

(14) $\int_0^{\pi/3} \cos^5(x)\sin(x)dx$

(15) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx$

(16) $\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$

(17) $\int_0^1 \frac{dx}{2\cosh(x)+\sinh(x)+1}$

(18) $\int_1^2 \frac{x^2\log(x)}{(x^3+1)^3}dx$

(19) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

(20) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

(21) $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$

(22) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}dx$

(23) $\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

(24) $\int_1^2 (x^2+1)\log(x)dx$

(25) $\int_0^{1/2} (\arcsin(x))^2 dx$

(26) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3(x)\cos(x)}{1+\sin^2(x)}dx$

(27) $\int_1^2 \log^2(x)dx$

(28) $\int_0^1 \frac{x^2}{x^3+1}dx$

(29) $\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}dx$

(30) $\int_0^1 \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1}dx$

(31) $\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)(x^3+1)}dx$

(32) $\int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{(1+x^2)^3}dx$

(33) $\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

(34) $\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$

(35) $\int_0^1 \frac{\cosh(x)}{e^x+1}dx$

(36) $\int_0^1 \arctan(x)dx$

(37) $\int_0^{\pi/2} \sin^4(x)dx$

(38) $\int_0^{\pi/2} \sin^5(x)dx$

(39) $\int_0^{\pi/2} x^2\sin^2(x)dx$

(40) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx$

(41) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}dx$

(42) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos(x)}$

(43) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{1+\sin^2(x)}dx$

(44) $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}dx$

(45) $\int_1^e \sin(\log(x))dx$

(46) $\int_1^2 \frac{\log(x)}{(1+x)^2}dx$

(47) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$

(48) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

(49) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}dx$

(50) $\int_0^1 \sqrt{x^3+x^4}dx$