Serie 1

In dieser Serie betrachten wir als Beispiel einer Geometrie die Hyperbolische Geometrie. Dabei definieren wir das Folgende:

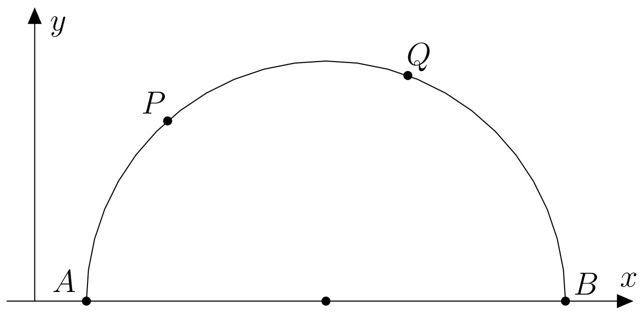
- Punkte sind Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y > 0$.
- Geraden sind Halbkreise mit Zentrum auf der x-Achse oder Strahlen parallel zur positiven y-Achse.

1. (a) *Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.*
   Zeigen Sie dies durch Konstruktion am Beispiel der folgenden drei Punktepaare:
   (i) $A = (-2, 1)$, $B = (-2, 3)$ (ii) $C = (1, 1)$, $D = (3, 1)$
   (iii) $E = (4, 1)$, $F = (5, 2)$

   (b) *Ist g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt, dann gibt es unendlich viele Geraden durch P, welche g nicht schneiden.*
   Konstruieren Sie je 2 Geraden durch die Punkte $P = (2, 3)$, $Q = (-1, 2)$ und $R = (2, 2)$, welche die Gerade g durch $(1, 2)$ und $(5, 1)$ nicht schneiden.

2. Konstruieren Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$ und $C = (5, 3)$. Ermitteln Sie näherungsweise die Summe der Innenwinkel. Was fällt Ihnen auf?

3. Die Distanz $d(P, Q)$ zweier Punkte $P = (P_x, P_y)$ und $Q = (Q_x, Q_y)$ definieren wir wie folgt: Falls die x-Koordinaten übereinstimmen (d.h. $P_x = Q_x$) setzen wir $d(P, Q) = \left|\log\left(\frac{Q_y}{P_y}\right)\right|$. Andernfalls ist die Gerade durch P und Q ein Halbkreis mit den Endpunkten A und B und wir definieren $d(P, Q) = \left|\log\left(\frac{|AQ|\cdot|BP|}{|AP|\cdot|BQ|}\right)\right|$, wobei $|AQ|$ die euklidische Länge der Strecke $\overline{AQ}$ ist.



Die *Äquidistante D zur Kurve C durch den Punkt P* ist definiert als die Kurve D durch den Punkt P bestehend aus allen Punkten der Ebene, die auf derselben Seite von C liegen und zur Kurve C jeweils denselben Abstand haben wie der Punkt P.

Finden Sie die folgenden Äquidistanten:

(a) zur Kurve $C_1\colon y = 3$ durch den Punkt $P_1 = (2, 1)$,

(b) zur Kurve $C_2\colon y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$ durch den Punkt $P_2 = (1, 2\sqrt{3})$.

Sie dürfen verwenden, dass die kürzeste Distanz von einem Punkt P zu einer euklidischen Geraden C entlang derjenigen hyperbolischen Geraden realisiert wird, die durch den Punkt P geht und in rechtem Winkel auf C auftrifft.

Abgabe: Am Montag, den 30. September, bis 12 Uhr, in die Fächer im HG J 68.

Internet: Die Übungsblätter mit Lösungen sowie weitere Hinweise zur Vorlesung finden Sie unter: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/hs/401-1511-00L/`