Serie 3

6. Beweisen Sie mit den Axiomen der Inzidenz, den Axiomen der Anordnung sowie dem Satz über die Separierung der Geraden, dass für vier Punkte P, Q, R, S auf einer Geraden immer folgende Implikation gilt:
$$B(P,Q,R) \wedge B(Q,R,S) \implies B(P,Q,S) \wedge B(P,R,S).$$

7. Zeigen Sie mit Hilfe der Axiome $\mathsf{I1}$, $\mathsf{I2}$, $\mathsf{I3}$, $\mathsf{B0}$, $\mathsf{B1}$, $\mathsf{B2}$, $\mathsf{B3}$, $\mathsf{B4}$, dass es auf jeder Strecke $\overline{PQ}$ einen Punkt S gibt, so dass gilt $B(P,S,Q)$.

8. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den üblichen (euklidischen) Geraden.

   (a) Definieren Sie eine dreistellige Relation $B(\cdot,\cdot,\cdot)$, so dass die Axiome $\mathsf{B0}$, $\mathsf{B1}$, $\mathsf{B2}$, $\mathsf{B3}$, $\mathsf{B4}$ gelten.

   Gegeben eine Distanzfunktion $d\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definieren wir die Kongruenzrelation für Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ durch
$$\overline{PQ} \cong \overline{RS} :\Longleftrightarrow d(P,Q) = d(R,S).$$

   Der *Einheitskreis* ist die Menge aller Punkte P mit $d(P,0) = 1$.

   (b) Zeigen Sie, dass die Kongruenzrelation für die Distanzfunktion d_1 gegeben durch $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \coloneqq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ die Axiome $\mathsf{C1}$, $\mathsf{C2}$, $\mathsf{C3}$ erfüllt. Skizzieren Sie den Einheitskreis für d_1.

   (c) Wiederholen Sie Teilaufgabe (b) für die Distanzfunktion d_∞ gegeben durch $d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \coloneqq \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

   (d) Für $d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \coloneqq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ erhalten wir das übliche euklidische Modell der Kongruenzrelation. Zeigen Sie, dass dieses Modell zu keinem der beiden Modelle in (b) bzw. (c) isomorph ist.

   Hinweis: Formulieren Sie einen Satz, der im euklidischen Modell wahr, in den anderen beiden Modellen jedoch falsch ist.

   (e) Sind die Modelle in (b) und (c) isomorph?

Abgabe: Am Montag, den 28. Oktober, bis 12 Uhr, in die Fächer im HG J 68.