Serie 4

Wir wissen aus Aufgabe 8, dass Kongruenz von Strecken durch die Angabe einer Distanzfunktion d erklärt werden kann. Dies wird im Folgenden stets implizit verwendet.

9. Wir betrachten die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den üblichen Geraden und dem üblichen Anordnungsbegriff, jedoch versehen mit der *französischen Eisenbahnmetrik*:

   $$d(A,B) := \begin{cases} \|A-B\|, & \text{falls } A \text{ und } B \text{ auf einer Geraden durch } (0,0) \text{ liegen,} \\ \|A\| + \|B\|, & \text{sonst,} \end{cases}$$

   wobei für $A = (x,y)$ gilt: $\|A\| := \sqrt{x^2+y^2}$.

   (a) Beschreiben Sie die Einheitskreise mit Zentrum $Z = (x,0)$ für $x \in [-2,2]$.

   (b) Zeigen Sie, dass in dieser Geometrie das Axiom $\mathsf{C1}$ nicht erfüllt ist.

   (c) Zeigen Sie, dass es in dieser Geometrie keine gleichseitigen Dreiecke mit einer Ecke im Ursprung gibt.

   (d) Beschreiben Sie die Menge aller gleichseitigen Dreiecke mit Seitenlänge 1.

10. Wir betrachten die Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den üblichen Geraden, dem üblichen Anordnungsbegriff und der üblichen Kongruenz von Winkeln, jedoch mit der Metrik aus Aufgabe 8(b).

    Zeigen Sie, dass die Axiome $\mathsf{C4}$ und $\mathsf{C5}$ erfüllt sind, nicht aber Axiom $\mathsf{C6}$.

11. In der hyperbolischen Ebene aus Serie 1 sei das Dreieck $\triangle ABC$ mit den Eckpunkten $A = (-2,2)$, $B = (1,1)$ und $C = (3,3)$ gegeben. Konstruieren Sie (mit Zirkel und Lineal) je ein zu $\triangle ABC$ kongruentes Dreieck mit einer Ecke in $A' = (4,1)$ bzw. $A'' = (6,3)$.

    Hinweis: Überlegen Sie sich geeignete Transformationen, unter denen die hyperbolische Metrik invariant ist.

12. **Satz 4.1.** *Seien k und k' Kreise mit Mittelpunkten M und M' und Radien $\overline{MP}$ bzw. $\overline{M'P'}$. Gilt $k = k'$ (als Punktmengen), so ist $M = M'$.*

    (a) Beweisen Sie Satz 4.1.

    (b) Beweisen Sie, dass zusätzlich $\overline{MP} = \overline{M'P'}$ gilt.

Abgabe: Am Montag, den 11. November, bis 12 Uhr, in die Fächer im HG J 68.