Serie 6

18. Wir betrachten für $\alpha \in \mathbb{R}$ die projektive Transformation

$$T = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & \sinh\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & \cosh\alpha \end{pmatrix},$$

wobei $\cosh\alpha = (\mathrm{e}^{\alpha} + \mathrm{e}^{-\alpha})/2$ und $\sinh\alpha = (\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha})/2$.

   (a) Zeigen Sie, dass T den Einheitskreis in $\mathbb{A}^2$ auf sich selbst abbildet.

   (b) Bestimmen Sie einen Parameter α, so dass T den Punkt $Q = (2, 0) \in \mathbb{A}^2$ auf die Ferngerade abbildet. Welchen Punkt erhalten Sie als $T(Q)$?

19. Gegeben seien die Punkte

$$\begin{array}{llll} P_1 = [1,0,0], & P_2 = [0,1,0], & P_3 = [0,0,1], & P_4 = [1,1,1], \\ Q_1 = [2,-2,1], & Q_2 = [1,-5,1], & Q_3 = [4,3,1], & Q_4 = [4,2,1], \end{array}$$

in der projektiven Ebene. Bestimmen Sie die projektive Transformation, welche für $1 \le i \le 4$ den Punkt P_i auf den Punkt Q_i abbildet.

20. In $\mathbb{A}^2$ seien die folgenden beiden Geraden gegeben: $g\colon 2x - 3y - 4 = 0$ und $h\colon 4x - 6y + 2 = 0$.

   (a) Bestimmen Sie die Gleichungen der entsprechenden Geraden G und H in der projektiven Ebene in den projektiven Koordinaten X, Y, Z.

   (b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden G und H.

   (c) Geben Sie einen Basiswechsel der projektiven Ebene an, so dass der Schnittpunkt von G, H in der neuen Basis die Koordinaten $[0, 0, 1]$ hat.

   (d) Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden Geraden g, h nach dem projektiven Basiswechsel.

21. (a) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Untersuchen Sie das Verhalten der Parabel $y = ax^2$ im Unendlichen.

   (b) Wandeln Sie den Einheitskreis $k\colon x^2 + y^2 = 1$ in $\mathbb{A}^2$ mit einem projektiven Basiswechsel in eine Parabel um, die durch den Punkt $(0, 0)$ geht und die Symmetrieachse $x = 0$ hat.

22. Wir betrachten die Punkte $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ und $X = (0, 0)$ in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2$.

   (a) Bestimmen Sie einen Punkt Y in der projektiven Ebene, so dass A, B, X, Y harmonisch liegen.

   (b) Sei T eine projektive Transformation, die sowohl A als auch B fixiert. Bestimmen Sie alle möglichen Paare von Punkten in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2$, die als $(T(X), T(Y))$ auftreten können.

Abgabe: Am Montag, den 9. Dezember, bis 12 Uhr, in die Fächer im HG J 68.