Symbole, Terme, Formeln

Wie jede geschriebene Sprache basiert die *Prädikatenlogik erster Stufe* auf einem *Alphabet*, welches aus den folgenden *Symbolen* besteht:

(a) **Variabeln** wie zum Beispiel $v_0, v_1, x, y, \ldots$ sind "Platzhalter" für die Objekte welche wir untersuchen (*z.B.* die Elemente einer Gruppe, natürliche Zahlen, oder Mengen).

(b) **Logische Operatoren** wie zum Beispiel "$\neg$" (*nicht*), "$\wedge$" (*und*), "$\vee$" (*oder*), "$\rightarrow$" (*impliziert*), und "$\leftrightarrow$" (*genau dann wenn*).

(c) **Logische Quantoren** die da sind *Existenzquantor* "$\exists$" (*es existiert*) und *Allquantor* "$\forall$" (*für alle*), wobei die Quantoren auf Objekte beschränkt sind und nicht zum Beispiel auf Formeln angewendet werden dürfen.

(d) **Gleichheitszeichen** "$=$", welches für die spezielle Relation der Gleichheit steht.

Die Symbole (a)–(d) heissen **logische Symbole**. Je nach mathematischem Gebiet, welches untersucht werden soll, werden sogenannte **nicht-logische Symbole** eingeführt:

(e) **Konstantensymbole** wie zum Beispiel die Zahl $\mathtt{0}$ in der Peano Arithmetik (Zahlentheorie), oder das Neutralelement $\mathtt{e}$ in der Gruppentheorie. Konstantensymbole stehen für bestimmte, festgelegte Objekte.

(f) **Funktionssymbole** wie zum Beispiel $\circ$ (die Operation in der Gruppentheorie), oder $+, \cdot, \mathtt{s}$ (die Operationen in der Peano Arithmetik, wobei $\mathtt{s}(n) := n + 1$). Funktionssymbole stehen für bestimmte Funktionen, welche Objekte als Argumente nehmen und Objekte zurückgeben. Mit jedem Funktionssymbol ist eine "Stelligkeit" verbunden, die uns sagt, wieviele Argumente das Funktionssymbol benötigt (*z.B.* ist "$\circ$" eine 2-stellige oder binäre Operation und die Nachfolgeroperation "$\mathtt{s}$" ist eine 1-stellige Funktion).

(g) **Relationssymbole** (wie zum Beispiel $\in$ in der Mengenlehre) stehen für feste Relationen zwischen (oder Eigenschaften von) Objekten. Wieder gehört zu jedem Relationssymbol eine "Stelligkeit"(*z.B.* ist "$\in$" eine 2-stellige oder binäre Relation).

Die Menge der nicht-logischen Symbole, welche zu einer bestimmten Theorie T (wie *z.B.* der Gruppentheorie oder der Mengenlehre) gehört, heisst **Signatur** *bzw.* **Sprache** der entsprechenden Theorie und wird mit $\mathscr{L}$ oder $\mathscr{L}_{\mathsf{T}}$ bezeichnet; und Formeln, welche in einer Sprache $\mathscr{L}$ formuliert sind, heissen $\mathscr{L}$-Formeln. Zum Beispiel besteht die Sprache der Gruppentheorie bloss aus den nicht-logischen Symbolen "$\mathtt{e}$" und "$\circ$", das heisst $\mathscr{L}_{\mathsf{GT}} = \{\mathtt{e}, \circ\}$ ist die Sprache der Gruppentheorie.

Ein erster Schritt zu einer richtigen Sprache besteht darin, mit diesen logischen und nicht-logischen Symbolen Wörter (*d.h. Terme*) zu bilden.

Terme:

(T1) Jede Variable ist ein Term.

(T2) Jedes Konstantensymbol ist ein Term.

(T3) Sind $t_1, \ldots, t_n$ bereits gebildete Terme und ist F ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist $Ft_1 \cdots t_n$ ein Term.

Es ist üblich weitere Symbole (wie *z.B.* Klammern) einzuführen, damit Terme, Relationen, und andere Ausdrücke einfacher zu lesen sind. Zum Beispiel schreiben wir $F(t_1, \ldots, t_n)$ anstelle von $Ft_1 \cdots t_n$.

Terme entsprechen in einem gewissen Grad den Wörtern, weil sie immer Objekte bezeichnen. Wie richtige Wörter sind sie keine Aussagen und können deshalb keine Beziehungen zwischen den Objekten ausdrücken. Im nächsten Schritt werden mit den Wörtern Aussagen (*d.h. Formeln*) gebildet.

Formeln:

(F1) Sind t_1 und t_2 Terme, dann ist $t_1 = t_2$ eine Formel.

(F2) Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und R ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $Rt_1 \cdots t_n$ eine Formel.

(F3) Ist φ eine bereits gebildete Formel, dann ist $\neg\varphi$ eine Formel.

(F4) Sind φ und ψ Formeln, dann sind $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, und $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Formeln. (Um Klammern zu vermeiden, können diese Formeln *z.B.* in *polnischer Notation* geschrieben werden, *d.h.* $\wedge\varphi\psi$, $\vee\varphi\psi$, *et cetera*.)

(F5) Ist φ eine Formel und x eine Variable, dann sind $\exists x\varphi$ und $\forall x\varphi$ Formeln.

Für binäre Relationen R (*bzw.* binäre Funktionen F) schreiben wir meist xRy (*bzw.* xFy) anstelle von $R(x, y)$ (*bzw.* $F(x, y)$). Zum Beispiel schreiben wir $x \in y$ (*bzw.* $x + y$) anstelle von $\in(x, y)$ (*bzw.* $+(x, y)$), und wir schreiben $x \notin y$ anstelle von $\neg(x \in y)$.

Ist φ eine Formel der Form $\exists x\psi$ oder der Form $\forall x\psi$ (für eine Formel ψ) und x kommt in der Formel ψ vor, dann sagen wir, dass x im *Bereich* eines logischen Quantors ist. Die Variable x heisst dann **gebunden**. Wenn die Variable x (an einer bestimmten Stelle) in keinem Bereich eines logischen Quantors ist, so heisst x an dieser Stelle **frei**. In einer Formel kann eine Variable x durchaus frei und gebunden vorkommen (*z.B.* $\exists y(x = y) \vee \forall x(x = y)$, hier kommen sowohl x wie auch y sowohl frei wie auch gebunden vor).

Eine Formel φ ist ein **Satz**, wenn alle Variabeln, die in der Formel φ vorkommen, überall gebunden sind. Sätze sind also Formeln ohne freie Variabeln. Zum Beispiel sind $\forall x\forall y(x = y \to y = x)$ und $\forall x\forall y(x = y)$ Sätze.

Zeichen & Bedeutung

Syntax & Semantik

Die mathematische Logik zerfällt in **Syntax** (Theorie der Beziehungen zwischen den Zeichen) und **Semantik** (Lehre der Bedeutung der Symbole, *bzw.* deren Interpretation). Im Vergleich zur Musik könnte man sagen, dass die Syntax (*d.h.* die formale Logik) der Partitur entspricht, welche Schwarz auf Weiss festhält, welche Noten gespielt werden sollen, während die Semantik der Umsetzung einer Partitur in hörbare Musik entspricht, welche sich zwar an die Partitur halten muss, in der Interpretation der Partitur aber frei ist. Obwohl die ganze Musik schon in der Partitur enthalten ist, so wird sie doch erst durch die Interpretation mit Leben erfüllt. Nehmen wir zum Beispiel als Partitur die Gruppenaxiome, so erhalten auch diese erst durch das betrachten konkreter Gruppen (*d.h.* erst durch die Interpretation) ihre Bedeutung.

Im Folgenden werden ein paar Parallelen zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene der Mathematik aufgezeigt. Diese sollen helfen, den logischen Aufbau (*bzw.* das Fundament) der Mathematik besser zu verstehen.

Syntaktische Ebene	Semantische Ebene
Terme. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (T1)–(T3) aufgebaut werden. Zum Beispiel ist das Konstantensymbol e der Gruppentheorie ein Term.	***Objekte.*** Terme sind Namen für Objekte. Durch die Interpretation wird ein Term (Name) zu dem *Objekt*, welches er bezeichnet. Zum Beispiel wird das Konstantensymbol e durch die Interpretation zum Neutralelement e einer Gruppe, e ist also ein Objekt.
Formeln. Das sind Zeichenketten, welche nach den formalen Regeln (F1)–(F5) aufgebaut werden. Formeln sind weder wahr noch falsch; auf der syntaktischen Ebene gibt es keinen Wahrheitsbegriff!	***Aussagen.*** Wird eine Formel interpretiert, so wird sie zu einer konkreten Aussage über bestimmte Objekte die entweder wahr oder falsch ist; und zwar unabhängig davon, ob wir ihren Wahrheitswert kennen.
Logische Axiome. Das sind Formeln, genauer *Formelschemen*, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können.	***Tautologien.*** Egal wie wir ein logisches Axiom interpretieren, die Aussage die wir erhalten ist immer wahr, *d.h.* eine Tautologie. Die logischen Axiome sind so gewählt, dass aus ihnen alle Tautologien hergeleitet werden können.
Nicht-logische Axiome. Das sind Formeln (*bzw.* Formelschemen) welche nicht-logische Symbole enthalten, aus denen, mit Hilfe von Schlussregeln, weitere Formeln hergeleitet werden können. Zum Beispiel sind die Gruppenaxiome, welche die nicht-logischen Symbole "e" und "$\circ$" enthalten, nicht-logische Axiome.	***Axiomensystem einer Theorie.*** Das sind Axiome (*d.h.* Grundaussagen), welche am Anfang einer Theorie (*z.B.* Gruppentheorie) stehen. Die nicht-logischen Symbole werden dann so interpretiert, dass alle Axiome wahr werden.

Ausser in der formalen Logik befinden wir uns in der Mathematik immer auf der semantischen Ebene. Auch wenn wir zum Beispiel eine allgemeine Gruppe untersuchen, besteht diese Gruppe in unserer Vorstellung aus Elementen, also aus Objekten, auf denen eine konkrete binäre Operation (mit gewissen Eigenschaften) definiert ist. Sogar wenn wir mathematische Beweise führen, bleiben wir auf der semantischen Ebene — wir können aber jeden mathematischen Beweis in einen formalen Beweis der syntaktischen Ebene übersetzen, dessen Korrektheit sogar von einem Computer überprüft werden kann.

Obwohl mathematische Theorien (wie *z.B.* die Gruppentheorie) üblicherweise auf nicht-logischen Axiomen beruhen, wird der Übergang von der syntaktischen Ebene der nicht-logischen Axiome (*z.B.* der Gruppenaxiome) auf die semantische Ebene (*z.B.* der konkreten Gruppen) im Allgemeinen nicht vollzogen.