

Lorenz Halbeisen und Norbert Hungerbühler (ETH Zürich)

Einführung in die

# Projektive Geometrie

Manuskript für den Workshop *Projektive Geometrie* des *27. Schweizerischen Tag über Mathematik und Unterricht* vom 7. September 2016 in Wil (SG)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Die reelle projektive Ebene</b> .....	1
Punkte und Geraden .....	1
Zwei weitere Modelle der projektiven Ebene .....	4
Homogene Koordinaten .....	5
Algebraische Betrachtung der Kegelschnitte .....	7
<b>2 Doppelverhältnisse</b> .....	9
Teilverhältnisse und Doppelverhältnisse .....	9
Invarianz von Doppelverhältnissen unter Projektionen .....	10
Das vollständige Vierseit .....	13
<b>3 Klassische Sätze der projektiven Geometrie</b> .....	17
Satz von Menelaos .....	18
Satz von Ceva .....	21
Satz von Desargues .....	23
Satz von Pappos .....	24
Satz von Carnot .....	26
Satz von Pascal .....	30
Satz von Brianchon .....	31
Satz von Poncelet für Drei- und Vierecke .....	32
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	37



# 1 Die reelle projektive Ebene

---

## Übersicht

Punkte und Geraden .....	1
Zwei weitere Modelle der projektiven Ebene .....	4
Homogene Koordinaten .....	5
Algebraische Betrachtung der Kegelschnitte .....	7

---

In diesem Kapitel führen wir die *reelle projektive Ebene* ein, und zwar aus einer algebraischen Sichtweise. Später werden wir dann zu einer mehr geometrischen Sichtweise wechseln. Der algebraische Zugang zur projektiven Geometrie setzt die Vektorrechnung in  $\mathbb{R}^3$  voraus, insbesondere das Vektorprodukt.

## Punkte und Geraden

Eine projektive Ebene ist eine Menge von Punkten und Geraden welche folgende Axiome erfüllt:

- P1. Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
- P2. Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- P3. Es gibt 4 Punkte, so dass keine 3 Punkte auf einer Geraden liegen.

Beachte, dass die euklidische Ebene (*bzw.* die reelle cartesische Ebene) keine projektive Ebene ist, da das Axiom P2 nicht erfüllt ist.

Im Folgenden werden wir die Koordinatenebene  $\mathbb{R}^2$  zu einer projektiven Ebene erweitern; dafür betrachten wir zuerst den Raum  $\mathbb{R}^3$ , in dem wir *projektive Punkte* und Geraden wie folgt definieren:

- **Projektive Punkte** sind “ $\mathbb{R}^3$ -Geraden” (*d.h.* Geraden in  $\mathbb{R}^3$ ) welche durch den **Ursprung**  $\mathcal{O} = (0, 0, 0)$  gehen.
- **Projektive Geraden** sind “ $\mathbb{R}^3$ -Ebenen” (*d.h.* Ebenen in  $\mathbb{R}^3$ ) die  $\mathcal{O}$  enthalten.

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Menge der projektiven Punkte und Geraden die Axiome P1, P2, P3 erfüllt. Zum Beispiel schneiden sich zwei verschiedene “ $\mathbb{R}^3$ -Ebenen” welche beide  $\mathcal{O}$  enthalten, in einer “ $\mathbb{R}^3$ -Geraden” durch  $\mathcal{O}$ , *d.h.* zwei verschiedene projektive Geraden schneiden sich in genau einem projektiven Punkt. Damit ist diese Menge der projektiven Punkte und Geraden eine projektive Ebene; die sogenannte **reelle projektive Ebene**.

## Darstellung von Punkten und Geraden als Tripel

**Punkte:** Durch jeden von  $\mathcal{O}$  verschiedenen “ $\mathbb{R}^3$ -Punkt”  $(x_0, y_0, z_0)$  geht genau eine Gerade durch  $\mathcal{O}$ ; *d.h.* jedes Tripel  $(x_0, y_0, z_0) \neq \mathcal{O}$  definiert genau einen projektiven Punkt.

Zwei von  $\mathcal{O}$  verschiedene Tripel  $(x_0, y_0, z_0)$  und  $(x_1, y_1, z_1)$  definieren denselben projektiven Punkt genau dann wenn

$$(x_0, y_0, z_0) = \lambda \cdot (x_1, y_1, z_1)$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , *d.h.*  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Für jedes Tripel  $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  definieren wir:

$$[x_0, y_0, z_0] := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \exists \lambda \in \mathbb{R}^* ((x_0, y_0, z_0) = \lambda \cdot (x, y, z))\}$$

Dann entspricht jeder Menge  $[x_0, y_0, z_0] \neq [0, 0, 0]$  genau ein Punkt der reellen projektiven Ebene; und umgekehrt entspricht jedem Punkt der reellen projektiven Ebene eine Menge  $[x_0, y_0, z_0]$ .

**Geraden:** Jedes reelle Tripel  $(u_0, v_0, w_0) \neq (0, 0, 0)$  definiert durch

$$u_0x + v_0y + w_0z = 0$$

eine “ $\mathbb{R}^3$ -Ebene” die  $\mathcal{O}$  enthält; und umgekehrt wird jede “ $\mathbb{R}^3$ -Ebene” die  $\mathcal{O}$  enthält durch eine solche Gleichung definiert. Somit definiert jedes Tripel  $(u_0, v_0, w_0) \neq (0, 0, 0)$

genau eine projektive Gerade. Zwei Tripel  $(u_0, v_0, w_0)$  und  $(u_1, v_1, w_1)$  definieren dieselbe projektive Gerade genau dann wenn

$$(u_0, v_0, w_0) = \lambda \cdot (u_1, v_1, w_1)$$

für ein  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ; denn für  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  gilt:

$$u_1x + v_1y + w_1z = 0 \iff \lambda u_1x + \lambda v_1y + \lambda w_1z = 0$$

Analog wie oben können wir projektive Geraden mit den Mengen  $[u_0, v_0, w_0] \neq [0, 0, 0]$  identifizieren.

**Dualitätsprinzip:** Jeder projektive Punkt kann als projektive Gerade aufgefasst werden; und umgekehrt kann jede projektive Gerade als projektiver Punkt aufgefasst werden. Die reelle projektive Ebene ist selbstdual.

Die folgenden beiden Beispiele zeigen die Dualität zwischen dem Schneiden zweier Geraden und einer Gerade durch zwei Punkte.

### Gerade durch zwei Punkte

Die Gerade durch die Punkte  $P_0 = [1, -2, 3]$  und  $P_1 = [2, 0, -1]$  erhält man dadurch, dass man mit dem Vektorprodukt die Ebenengleichung der “ $\mathbb{R}^3$ -Ebene” bestimmt, welche von den Vektoren  $(1, -2, 3)$  und  $(2, 0, -1)$  aufgespannt wird. Es gilt

$$(1, -2, 3) \times (2, 0, -1) = (2, 7, 4)$$

und somit ist die projektive Gerade  $G$  welche durch  $P_0$  und  $P_1$  geht bestimmt durch die Gleichung

$$2x + 7y + 4z = 0.$$

Mit anderen Worten, ein projektiver Punkt  $[x_0, y_0, z_0]$  liegt genau dann auf  $G$  falls gilt  $2x_0 + 7y_0 + 4z_0 = 0$ .

### Schnittpunkt zweier Geraden

Der Schnittpunkt der Geraden  $G_0 = [1, -2, 3]$  und  $G_1 = [2, 0, -1]$  erhält man dadurch, dass man mit dem Vektorprodukt die Schnittgerade der beiden “ $\mathbb{R}^3$ -Ebenen” bestimmt, deren Normalenvektoren die Vektoren  $(1, -2, 3)$  und  $(2, 0, -1)$  sind. Es gilt

$$(1, -2, 3) \times (2, 0, -1) = (2, 7, 4)$$

und somit ist der projektive Punkt

$$P = [2, 7, 4]$$

der Schnittpunkt der Geraden  $G_0$  und  $G_1$ .

## Zwei weitere Modelle der projektiven Ebene

Da es nicht leicht ist, sich Geraden als Punkte und Ebenen als Geraden vorzustellen, führen wir noch zwei weitere Modelle der reellen projektiven Ebene ein, bei denen projektive Punkte und Geraden mit Ausnahmen “normalen” Punkten und Geraden entsprechen.

### Das Kugelmodell

Im Kugelmodell betrachten wir die Kugeloberfläche der Einheitskugel mit Mittelpunkt  $\mathcal{O}$  wobei wir gegenüberliegende Punkte identifizieren. Mit anderen Worten: Projektive Punkte sind “ $\mathbb{R}^3$ -Punkte” auf der Einheitskugel, wobei gegenüberliegende Punkte identifiziert werden. Ist  $[x, y, z]$  ein projektiver Punkt, so identifizieren wir  $[x, y, z]$  durch

$$[x, y, z] \mapsto \pm \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \quad \text{wobei } r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

mit zwei gegenüberliegenden Punkten auf die Kugeloberfläche. Zum Beispiel wird der Punkt  $[2, 0, -1]$  mit den beiden Punkten  $\pm \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$  identifiziert.

Im Kugelmodell sind projektive Geraden *Grosskreise* (bzw. halbe Grosskreise) auf der Kugeloberfläche.

### Die affine Ebene mit Ferngerade

Legen wir an den “Nordpol” der Einheitskugel, d.h. im Punkt  $(0, 0, 1)$ , eine Ebene und projizieren die Punkte der Kugeloberfläche (d.h. die Punkte des Kugelmodells) auf die Ebene, so erhalten wir ein weiteres Modell:

$$[x, y, z] \mapsto \begin{cases} \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right) & \text{für } z \neq 0, \\ [x, y, 0] & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Die Punkte der Form  $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$  bilden die **affine Ebene**  $\mathbb{A}^2$ , und die Punkte  $[x, y, 0[$  bilden die sogenannte **Ferngerade**  $FG$ .

Die affine Ebene  $\mathbb{A}^2$  ist isomorph zur reellen Koordinatenebene  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longleftrightarrow \mathbb{A}^2 \\ (x, y) &\overset{\longleftarrow}{\longleftarrow} (x, y, 1) \end{aligned}$$

Die Punkte auf der Ferngeraden  $FG$  sind die Bilder des "Äquators" der Einheitskugel; von der affinen Ebene  $\mathbb{A}^2$  aus gesehen liegen die Punkte der  $FG$  im Unendlichen.

## Homogene Koordinaten

Jede Gerade  $g$  in der Koordinatenebene  $\mathbb{R}^2$  lässt sich in der Form

$$g : ax + by + c = 0 \quad \text{für } a, b, c \in \mathbb{R}, (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

darstellen. Anstelle des Parameters  $c$  können wir auch  $c \cdot 1$  schreiben, *d.h.*  $g : ax + by + c \cdot 1 = 0$ . Sei nun  $g' : ax + by + cz = 0$ . Ein Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  liegt genau dann auf  $g$ , wenn der Punkt  $(x, y, 1) \in \mathbb{A}^2$  die Gleichung  $g'$  erfüllt. Dies zeigt uns, wie wir aus Geraden  $g$  in  $\mathbb{R}^2$ , Geraden  $G$  in  $\mathbb{A}^2$  erhalten; um  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{A}^2$  besser zu unterscheiden, benutzen wir Grossbuchstaben für Objekte in  $\mathbb{A}^2$ . Eine Gerade

$$g : ax + by + c = 0$$

in  $\mathbb{R}^2$  entspricht somit der Geraden

$$G : aX + bY + cZ = 0$$

in  $\mathbb{A}^2$ . Dieser Vorgang heisst **homogenisieren**. Beachte, dass die Geradengleichung  $G : aX + bY + cZ = 0$  wohldefiniert ist, *d.h.* falls  $(X_0, Y_0, Z_0)$  auf  $G$  liegt, so liegt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  auch  $\lambda \cdot (X_0, Y_0, Z_0)$  auf  $G$ .

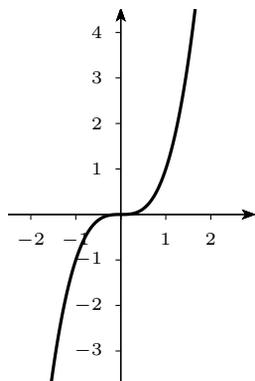
Analog werden Kurven höherer Ordnung homogenisiert: Zum Beispiel entspricht der kubischen Kurve

$$x^3 + 2xy^2 - 5xy + y^2 - 7y + 8 = 0 \quad (\text{in } \mathbb{R}^2)$$

die kubische Kurve

$$X^3 + 2XY^2 - 5XYZ + Y^2Z - 7YZ^2 + 8Z^3 = 0 \quad (\text{in } \mathbb{A}^2).$$

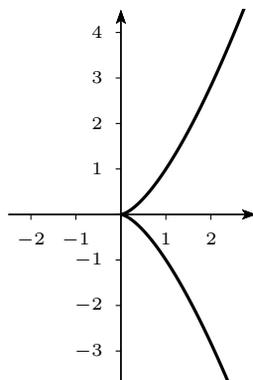
Durch das Homogenisieren kann das Verhalten von Kurven im Unendlichen untersucht werden: Dafür vertauschen wir zum Beispiel in der homogenisierten Gleichung  $Z$  mit  $Y$ , d.h. wir vertauschen die FG  $Z = 0$  mit der  $X$ -Achse  $Y = 0$ . Der kubischen Kurve  $y = x^3$  in  $\mathbb{R}^2$  entspricht die kubische Kurve  $YZ^2 = X^3$  in  $\mathbb{A}^2$ .



Vertauschen wir  $Z$  mit  $Y$ , so erhalten wir

$$ZY^2 = X^3$$

und durch Dehomogenisieren erhalten wir die sogenannte Neil'sche Parabel  $y^2 = x^3$ .



Die ursprüngliche Kurve  $y = x^3$  hat also im Unendlichen einen "Spitz" (also eine Singularität).

## Algebraische Betrachtung der Kegelschnitte

Algebraisch gesehen sind Kegelschnitte Kurven zweiter Ordnung, also Kurven der Form

$$k : ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

wobei wir an die Parameter  $a, \dots, f$  gewisse Bedingungen stellen müssen, damit der Kegelschnitt weder in Geraden zerfällt noch leer ist. In homogenen Koordinaten haben Kegelschnitte die Form

$$K : aX^2 + bY^2 + cXY + dXZ + eYZ + fZ^2 = 0.$$

Die Punkte eines Kegelschnitts  $K$  (bzw. einer Kurve zweiter Ordnung) können in der projektiven Ebene auch als Nullstellen einer *nichtausgearteten symmetrischen Bilinearfunktion* aufgefasst werden (die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht). Dazu definieren wir zum Kegelschnitt  $K$  die folgende symmetrische Matrix:

$$A_K = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{c}{2} & b & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

Ein Punkt  $P = (X, Y, Z)$  der projektiven Ebene liegt genau dann auf dem Kegelschnitt  $K$  falls gilt:

$$\langle P, A_K P \rangle = 0$$

Zum Beispiel gehört zum Kegelschnitt

$$k : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

also zum Kreis mit Mittelpunkt  $(a, b)$  und Radius  $r$ , die Matrix

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ -a & -b & a^2 + b^2 - r^2 \end{pmatrix}$$

Ist  $K$  ein Kegelschnitt, so lässt sich zeigen, dass die Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  welche durch  $\Phi(P, Q) := \langle P, A_K Q \rangle$  definiert ist, eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearfunktion ist. Allgemein lässt sich zeigen, dass es zu jeder symmetrischen Bilinearfunktion  $\Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine orthogonale Basis in  $\mathbb{R}^3$  gibt, so dass die zu  $\Phi$  gehörige Matrix  $A$  bezüglich dieser Basis Diagonalform hat (siehe Greub [1, Kap. 7, §2]). Aus geometrischen Überlegungen folgt dann, dass jeder Kegelschnitt  $K$  das Bild eines Kreises unter einer Zentralprojektion ist.

Im Folgenden betrachten wir Kegelschnitte nur noch aus geometrischer Sicht, *d.h.* als Bilder von Kreisen unter Zentralprojektionen. In diesem Sinne sind Kegelschnitte also Schnitte durch schiefe Kreisegel.

Algebraisch lässt sich zeigen, dass *projektive Transformationen*, (*d.h.* reguläre lineare Selbstabbildungen von  $\mathbb{R}^3$ ) Kegelschnitte auf Kegelschnitte abbilden. Weiter lässt sich zeigen, dass jede projektive Transformation einer Zentralprojektion entspricht und umgekehrt. Deshalb werden wir im Folgenden projektive Transformationen beiseite lassen und nur Zentralprojektionen betrachten.

# 2 Doppelverhältnisse

---

## Übersicht

Teilverhältnisse und Doppelverhältnisse .....	9
Invarianz von Doppelverhältnissen unter Projektionen .....	10
Das vollständige Vierseit .....	13

---

## Teilverhältnisse und Doppelverhältnisse

Ist  $X$  ein Punkt auf der Geraden  $AB$  aber verschieden von  $B$ , so wird das Teilverhältnis wie folgt definiert:

$$\text{TV}(ABX) := \begin{cases} \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \geq 0 & \text{falls } X \text{ zwischen } A \text{ und } B \text{ liegt,} \\ -\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \leq 0 & \text{falls } X \text{ ausserhalb von } \overline{AB} \text{ liegt.} \end{cases}$$



Man beachte, dass der Wert von  $\text{TV}(ABX)$  die Lage von  $X$  eindeutig festlegt.

Ist  $Y$  ein weiterer Punkt auf  $AB$ , verschieden von  $A, B$ , so ist das Doppelverhältnis

$$\text{DV}(ABXY) := \frac{\text{TV}(ABX)}{\text{TV}(ABY)} .$$



Sind  $A, X, B, Y$  vier Punkte auf einer Geraden und gilt  $DV(ABXY) = -1$ , so sagen wir,  $AXBY$  liegen **harmonisch**. Beachte, dass aus  $DV(ABXY) = -1$  folgt:

$$\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{BX}} = \frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{BY}}$$

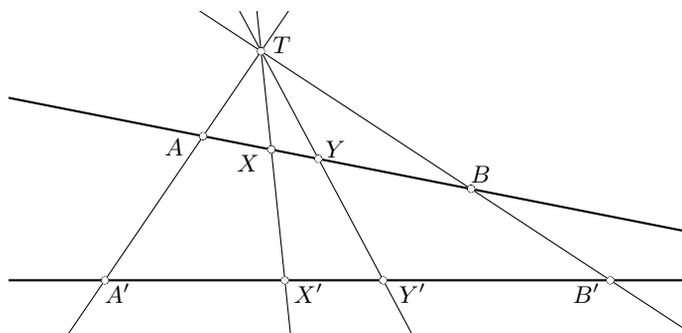
wobei  $X$  (bzw.  $Y$ ) auf der Strecke  $\overline{AB}$  liegt und  $Y$  (bzw.  $X$ ) ausserhalb von  $\overline{AB}$  liegt.

## Invarianz von Doppelverhältnissen unter Projektionen

### Satz 2.1 (Satz über Doppelverhältnisse)

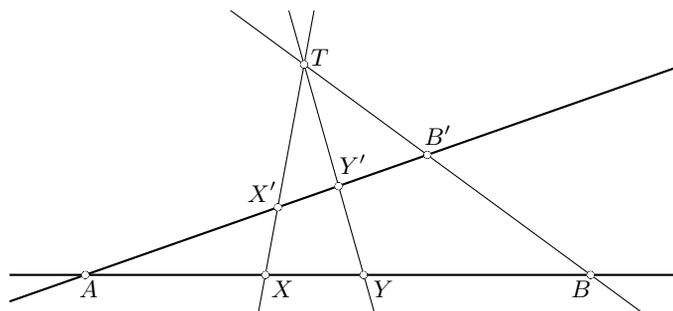
- Werden zwei Geraden von vier sich schneidenden Geraden wie in der Figur geschnitten, so gilt

$$DV(ABXY) = DV(A'B'X'Y').$$

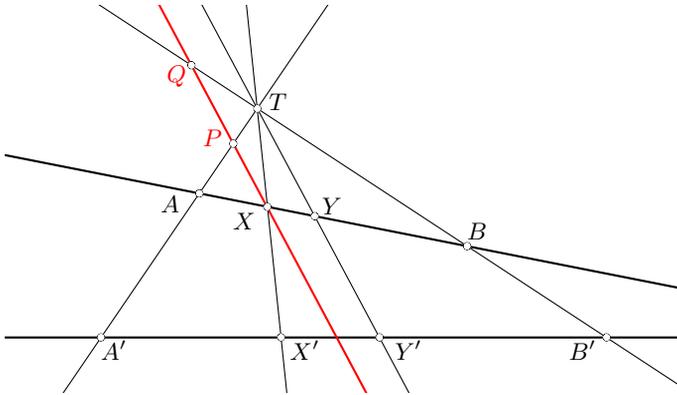


Man sagt, das Doppelverhältnis sei projektiv invariant.

- Ist  $A = A'$  der Schnittpunkt der beiden Trägergeraden, so gilt: Die Geraden  $BB', XX', YY'$  gehen durch einen Punkt oder sind parallel genau dann, wenn  $DV(ABXY) = DV(A'B'X'Y')$ .



**Beweis:** Zuerst zeichnen wir eine Parallele zu  $TY$  durch  $X$ , welche  $TA$  und  $TB$  in  $P$  bzw.  $Q$  schneidet.



Mit dem **2. Strahlensatz** (Streckungszentrum  $A$ ) erhalten wir

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{TY}}$$

und mit dem **2. Strahlensatz** (Streckungszentrum  $B$ ) erhalten wir

$$\frac{\overline{BY}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{TY}}{\overline{QX}}.$$

Die Produkte der linken und rechten Seiten führen zur Gleichung

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{PX}}{\overline{QX}}.$$

Anders ausgedrückt heisst das:

$$DV(ABXY) = \frac{\overline{PX}}{\overline{QX}}$$

Weil nun das Verhältnis  $\overline{PX} : \overline{QX}$  nur vom Geradenbüschel  $TA, TX, TY, TB$  abhängt, nicht aber von der Wahl der Geraden  $AB$ , gilt

$$DV(ABXY) = \frac{\overline{PX}}{\overline{QX}} = DV(A'B'X'Y')$$

und damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Beim zweiten Teil des Satzes sind zwei Implikationen zu zeigen. Nehmen wir zuerst an, die Geraden  $BB', XX', YY'$  schneiden sich in einem Punkt. Dann folgt  $DV(ABXY) = DV(AB'X'Y')$  aus dem ersten Teil des Satzes.

Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, dass  $DV(ABXY) = DV(AB'X'Y')$ . Sind die Geraden  $BB', XX', YY'$  parallel, ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, dass sich zum Beispiel  $YY'$  und  $BB'$  in einem Punkt  $T$  schneiden. Sei dann  $X''$  der Schnittpunkt der Geraden  $TX$  und  $AB'$ . Dann gilt wegen des ersten Teils des Satzes  $DV(ABXY) = DV(AB'X'Y') = DV(AB'X''Y')$ . Der Wert des Doppelverhältnisses  $DV(AB'X''Y')$  legt aber die Lage des Punktes  $X''$  fest, d.h.  $X' = X''$ . **q.e.d.**

**Bemerkung:** Da projektive Transformationen sich als Zentralprojektionen auffassen lassen, gilt **Satz 2.1** analog auch für projektive Transformationen. Das heisst, Doppelverhältnisse bleiben nicht nur unter Zentralprojektionen, sondern auch unter projektiven Transformationen erhalten. Dies erlaubt uns auch algebraisch, Sätze über Kreise auf allgemeine Kegelschnitte zu übertragen (wie wir dies zum Beispiel im Beweis von **Satz 2.2** tun werden).

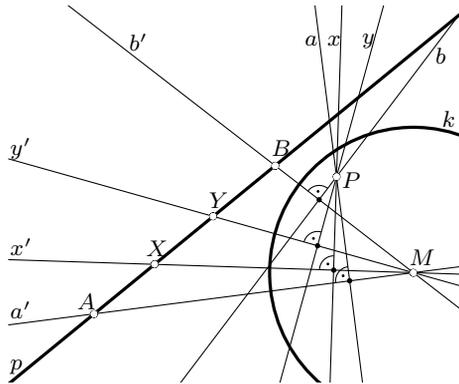
Doppelverhältnisse lassen sich auch für vier sich in einem Punkt  $T$  schneidende Geraden  $a, b, x, y$  definieren: Dazu wählt man eine beliebige Gerade  $g$ , welche nicht durch  $T$  geht. Sind die Schnittpunkte von  $g$  mit den entsprechenden Geraden mit  $A, B, X, Y$  bezeichnet, so ist  $DV(abxy) := DV(ABXY)$ . Aufgrund von **Satz 2.1** ist dieser Wert unabhängig von der Wahl von  $g$ .

Als Anwendung wollen wir zeigen, wie das Doppelverhältnis und die Polarentheorie miteinander verknüpft sind; dieser Sachverhalt wird aber im Folgenden nicht benutzt.

### Satz 2.2

Sei  $k$  ein Kegelschnitt,  $A, B, X, Y$  vier Punkte auf einer Geraden  $p$  und  $a, b, x, y$  die Polaren der vier Punkte. Dann gilt  $DV(ABXY) = DV(abxy)$ .

**Beweis:** Aufgrund von **Satz 2.1** genügt es, den Satz für einen Kreis  $k$  zu zeigen. Sei dazu  $M$  der Mittelpunkt von  $k$  und  $a', b', x', y'$  die Geraden durch  $M$  und die entsprechenden Punkte  $A, B, X, Y$ . Da die Polaren  $a, b, x, y$  durch den Pol  $P$  von  $p$  gehen und je senkrecht auf  $a', b', x', y'$  stehen, schneiden sich die Geraden  $a, b, x, y$  unter denselben Winkeln wie  $a', b', x', y'$ . Somit gilt  $DV(ABXY) = DV(a'b'x'y') = DV(abxy)$ .

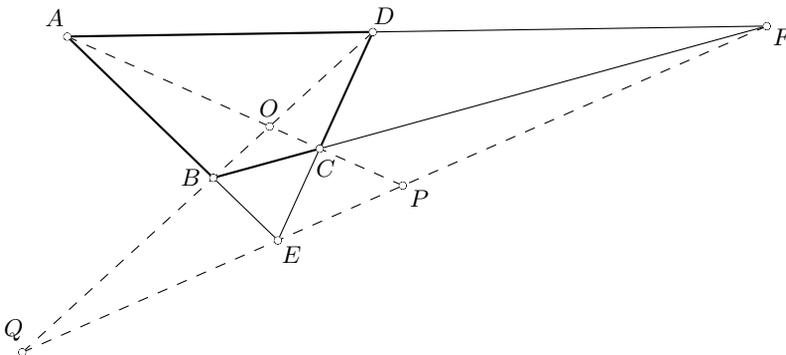


q.e.d.

## Das vollständige Vierseit

Zum Schluss dieses Kapitels betrachten wir harmonische Verhältnisse am Viereck, oder genauer gesagt, am *vollständigen Vierseit*.

**Vollständiges Vierseit.** Schneiden sich in einem Viereck  $ABCD$  die gegenüberliegenden Seiten  $AB$  und  $CD$  in  $E$  sowie  $BC$  und  $DA$  in  $F$ , so entsteht ein *vollständiges Vierseit* mit den Ecken  $ABCDEF$ . Dieses vollständige Vierseit hat die drei *Diagonalen*  $AC, BD, EF$ , auf denen jeweils zwei Eckpunkte und zwei Schnittpunkte mit den anderen Diagonalen liegen.

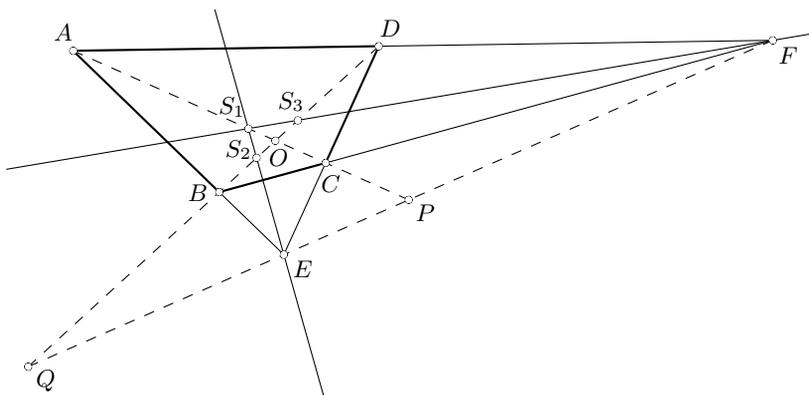


Auf jeder der drei Diagonalen liegen also vier Punkte, welche nach dem folgenden Satz harmonisch liegen:

**Satz 2.3**

*Im vollständigen Viereck liegen die vier Punkte auf den Diagonalen jeweils harmonisch, und zwar sind jeweils die Eckpunkte und die Diagonalschnittpunkte zugeordnet.*

**Beweis:** Zuerst wählen wir den Punkt  $S_1$  auf der Geraden  $AC$  so, dass die Strecke  $\overline{AC}$  durch  $S_1$  und  $P$  harmonisch geteilt wird (d.h.  $AS_1CP$  liegen harmonisch). Weiter seien  $S_2$  und  $S_3$  die Schnittpunkte von  $BD$  mit  $ES_1$  bzw. mit  $FS_1$ .



Weil  $AS_1CP$  harmonisch liegen, bilden die vier Geraden  $EA, ES_1, ED, EF$  ein harmonisches Geradenbüschel (d.h.  $DV(EAES_1ED EF) = -1$ ) und nach **Satz 2.1** teilen folglich  $S_2$  und  $Q$  die Strecke  $\overline{BD}$  harmonisch.

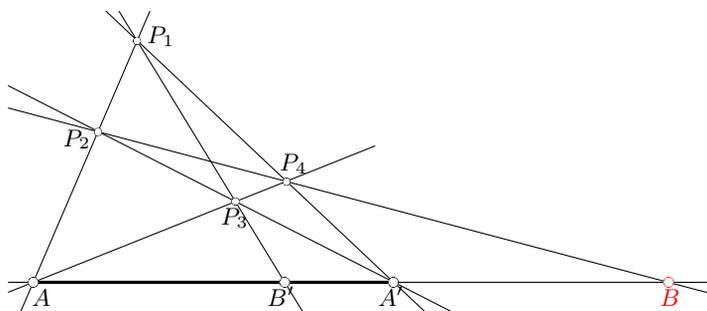
Weil auch die vier Geraden  $FA, FS_1, FB, FE$  ein harmonisches Geradenbüschel bilden, folgt wiederum mit **Satz 2.1**, dass  $S_3$  und  $Q$  die Strecke  $\overline{BD}$  ebenfalls harmonisch teilen.

Da nun der innere Teilungspunkt der Strecke  $\overline{BD}$  bei gegebenem äußeren Teilungspunkt  $Q$  eindeutig bestimmt ist (vergleiche mit der zweiten Konstruktion des vierten harmonischen Punktes), gilt  $S_2 = S_3$ , und nach Konstruktion der Punkte  $S_2$  und  $S_3$  erhalten wir  $O = S_1 = S_2 = S_3$ . Somit liegen sowohl  $AOCP$  als auch  $QBOD$  harmonisch.

Weil nun die vier Geraden  $AQ, AB, AO, AD$  ein harmonisches Geradenbüschel bilden, welches von der Geraden  $EF$  geschnitten wird, liegen auch die vier Schnittpunkte  $QE PF$  harmonisch. **q.e.d.**

Der vorhergehende Satz erlaubt uns eine Konstruktion der harmonischen Teilung mit dem Lineal allein: Als Beispiel zeigen wir, wie aus drei gegebenen Punkten  $AB'A'$  der vierte harmonische Punkt  $B$  konstruiert werden kann.

### Konstruktion eines vierten harmonischen Punktes mit dem Lineal allein



1. Wähle einen beliebigen Punkt  $P_1$  außerhalb der Geraden  $AA'$  und auf der Strecke  $\overline{AP_1}$  einen Punkt  $P_2$ .
2. Sei  $P_3$  der Schnittpunkt von  $B'P_1$  mit  $A'P_2$  und  $P_4$  der Schnittpunkt von  $AP_3$  mit  $A'P_1$ .
3. Schließlich sei  $B$  der Schnittpunkt von  $P_2P_4$  mit  $AA'$ .

Betrachten wir nun das vollständige Vierseit  $P_1P_2P_3P_4AA'$ , so liegen nach **Satz 2.3** die Punkte  $AB'A'B$  harmonisch.

**Bemerkung:** Mit Hilfe dieser Konstruktion können wir mit dem Lineal alleine Tangenten von einem Punkt an einen Kreis konstruieren, und zwar ohne dass wir den Mittelpunkt des Kreises kennen (siehe Halbeisen, Hungerbühler, Läuchli [5]).



# 3 Klassische Sätze der projektiven Geometrie

---

## Übersicht

Satz von Menelaos .....	18
Satz von Ceva .....	21
Satz von Desargues .....	23
Satz von Pappos .....	24
Satz von Carnot .....	26
Satz von Pascal .....	30
Satz von Brianchon .....	31
Satz von Poncelet für Drei- und Vierecke .....	32

---

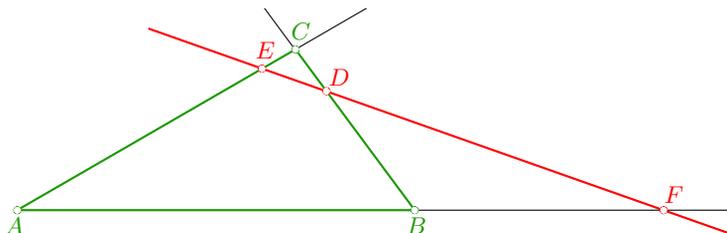
In diesem Kapitel möchten wir ein paar klassische Sätze der projektiven Geometrie beweisen. Die Sätze können auch in der euklidischen Geometrie bewiesen werden, allerdings müssen wir dann jeweils Spezialfälle (z.B. das Fehlen von Schnittpunkten paralleler Geraden) separat behandeln (siehe Halbeisen, Hungerbühler, Läuchli [5] für Beweise in der euklidischen Geometrie). In der projektiven Geometrie lassen sich die Sätze mit Hilfe von Doppelverhältnissen recht elegant und einfach beweisen, deshalb werden sie üblicherweise auch der projektiven Geometrie zugeordnet und nicht der euklidischen Geometrie.

## Satz von Menelaos

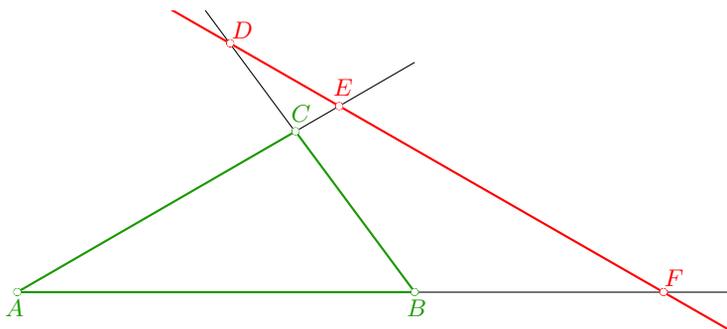
### Satz von Menelaos 3.1

Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  sowie drei Punkte  $D, E, F$ , welche auf den (verlängerten) Dreiecksseiten  $a, b, c$  liegen. Liegen die drei Punkte  $D, E, F$  auf einer Geraden, so gilt:

$$\text{TV}(ABF) \cdot \text{TV}(BCD) \cdot \text{TV}(CAE) = -1$$



$$\text{TV}(ABF) < 0 \quad \text{TV}(BCD) < 0 \quad \text{TV}(CAE) < 0$$

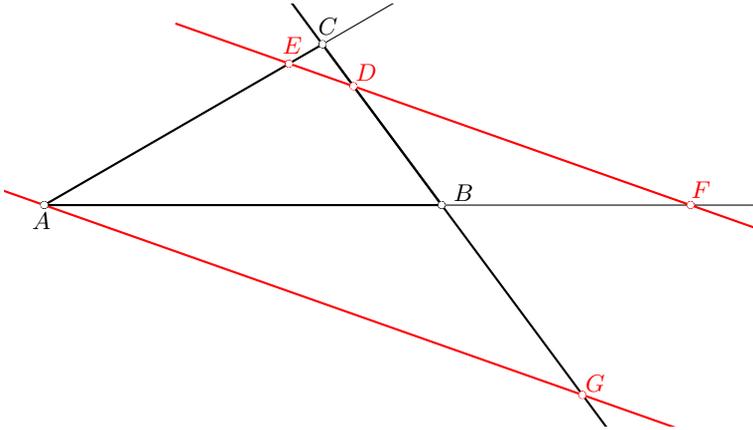


$$\text{TV}(ABF) < 0 \quad \text{TV}(BCD) > 0 \quad \text{TV}(CAE) > 0$$

Umgekehrt: Gilt die obige Gleichung, und liegen keiner oder genau zwei der Punkte  $D, E, F$  auf den Seiten  $a, b, c$  des Dreiecks, so liegen die drei Punkte  $D, E, F$  auf einer Geraden.

**Beweis:** Wir betrachten nur den Fall, in dem zwei der Punkte  $D, E, F$  auf den Seiten  $a, b, c$  des Dreiecks liegen, der andere Fall ist analog.

Zuerst legen wir durch  $A$  eine Parallele zu  $ED$ , welche  $BC$  in  $G$  schneidet.



Mit dem **1. Strahlensatz** (Streckungszentrum  $C$ ) erhalten wir

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}$$

und mit dem **1. Strahlensatz** (Streckungszentrum  $B$ ) erhalten wir

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}}.$$

Die Produkte der linken und rechten Seiten führen zur Gleichung

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BF}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = 1$$

Mit Teilverhältnissen ausgedrückt heisst das:

$$\text{TV}(ABF) \cdot \text{TV}(BCD) \cdot \text{TV}(CAE) = -1$$

Um die Umkehrung zu zeigen nehmen wir an,  $E, D, F$  seien nicht kollinear. Sei  $F'$  der Schnittpunkt von  $ED$  mit  $AB$ . Dann gilt  $\text{TV}(ABF') \cdot \text{TV}(BCD) \cdot \text{TV}(CAE) = -1$ , d.h.

$$\frac{\overline{BF'}}{\overline{AF'}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}.$$

Weil  $F \neq F'$ , existiert ein  $\varepsilon \neq 0$  mit  $\overline{AF'} = \overline{AF} + \varepsilon$  und  $\overline{BF'} = \overline{BF} + \varepsilon$ , und somit gilt:

$$\frac{\overline{BF} + \varepsilon}{\overline{AF} + \varepsilon} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$$

und weil  $\varepsilon \neq 0$  erhalten wir

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} \neq \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$$

d.h.  $\text{TV}(ABF) \cdot \text{TV}(BCD) \cdot \text{TV}(CAE) \neq -1$ .

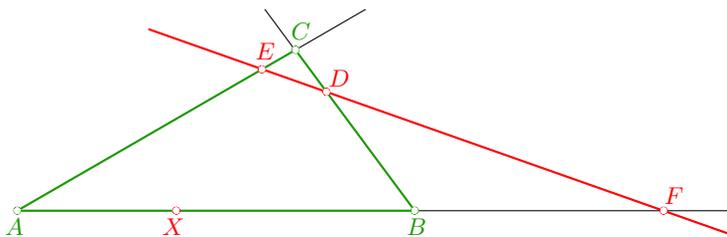
**q.e.d.**

Als Folgerung aus dem **Satz von Menelaos** erhalten wir das folgende

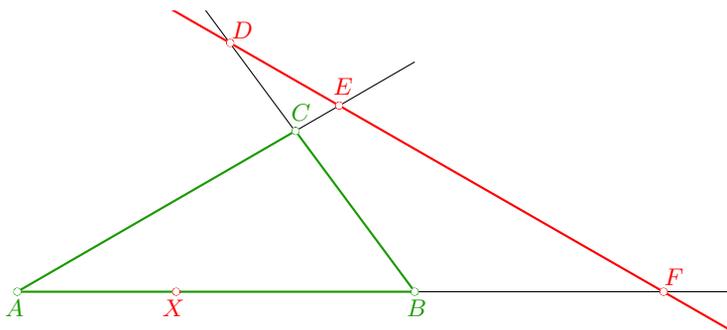
**Korollar 3.2**

Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  sowie drei Punkte  $D, E, F$ , welche auf den (verlängerten) Dreiecksseiten  $a, b, c$  liegen. Liegen die drei Punkte  $D, E, F$  auf einer Geraden wobei  $F$  ausserhalb der Dreiecksseite  $c$  liegt, und ist  $X$  ein Punkt auf  $c$ , so gilt:

$$TV(ABX) \cdot TV(BCD) \cdot TV(CAE) = -DV(ABXF)$$



$$DV(ABXF) < 0 \quad TV(BCD) > 0 \quad TV(CAE) > 0$$



$$DV(ABXF) < 0 \quad TV(BCD) < 0 \quad TV(CAE) < 0$$

**Beweis:**

$$TV(ABX) \cdot TV(BCD) \cdot TV(CAE) =$$

$$\underbrace{\frac{TV(ABX)}{TV(ABF)}}_{=DV(ABXF)} \cdot \underbrace{TV(ABF) \cdot TV(BCD) \cdot TV(CAE)}_{=-1 \text{ (mit Satz von Menelaos)}} = -DV(ABXF)$$

q.e.d.

Als weitere Folgerung erhalten wir das folgende

**Korollar 3.3**

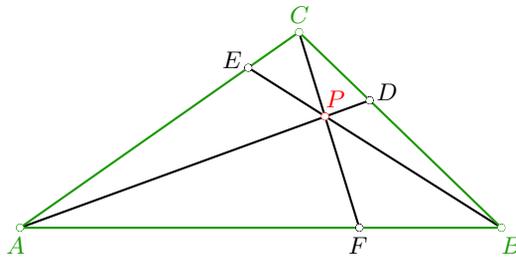
Das Produkt  $TV(ABX) \cdot TV(BCD) \cdot TV(CAE)$  ist projektiv invariant.

**Satz von Ceva**

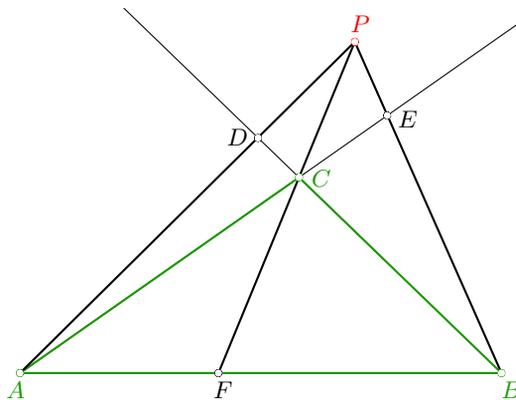
**Satz von Ceva 3.4**

Gegeben sei ein Dreieck  $\triangle ABC$  und drei Geraden durch die Eckpunkte des Dreiecks, welche die (verlängerten) Dreiecksseiten  $a, b, c$  in den drei Punkten  $D, E, F$  schneiden. Die drei Geraden  $AD, BE, CF$  schneiden sich genau dann in einem Punkt  $P$ , wenn gilt:

$$TV(ABF) \cdot TV(BCD) \cdot TV(CAE) = 1$$



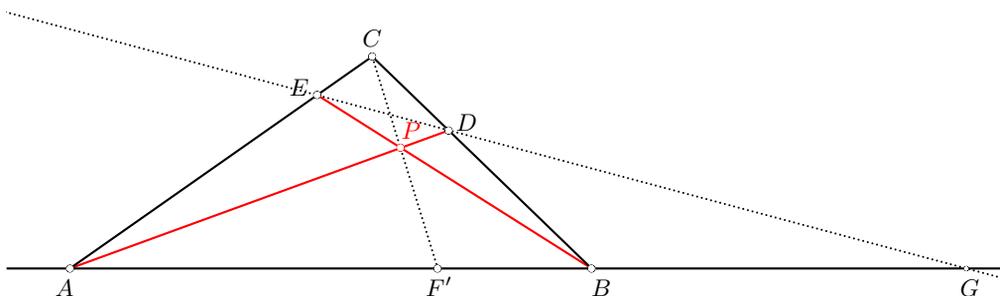
$$TV(ABF) > 0 \quad TV(BCD) > 0 \quad TV(CAE) > 0$$



$$TV(ABF) > 0 \quad TV(BCD) < 0 \quad TV(CAE) < 0$$

**Beweis:** Wir betrachten nur den Fall, in dem der Schnittpunkt der Geraden  $AD$  und  $BE$  innerhalb des Dreiecks liegt, der Fall, in dem dieser Schnittpunkt ausserhalb des Dreiecks liegt, ist analog.

Sei  $P$  der Schnittpunkt der Geraden  $AD$  und  $BE$ . Dann ist  $CEPDAB$  ein vollständiges Vierseit. Die Diagonalen  $CP$  und  $ED$  schneiden die Diagonale  $AB$  in  $F'$  bzw. in  $G$ .



Mit **Satz 2.3** liegen  $AF'BG$  harmonisch, d.h.  $DV(ABF'G) = -1$ , und mit **Korollar 3.2** gilt  $TV(ABF') \cdot TV(BCD) \cdot TV(CAE) = -DV(ABF'G)$ , d.h.

$$TV(ABF') \cdot TV(BCD) \cdot TV(CAE) = 1.$$

In der ursprünglichen Figur geht  $CF$  also genau dann durch den Schnittpunkt  $P$  der Geraden  $AD$  und  $BE$ , wenn gilt  $F = F'$ . Somit schneiden sich die drei Geraden  $AD, BE, CF$  genau dann in einem Punkt, wenn gilt

$$TV(ABF) \cdot TV(BCD) \cdot TV(CAE) = 1.$$

**q.e.d.**

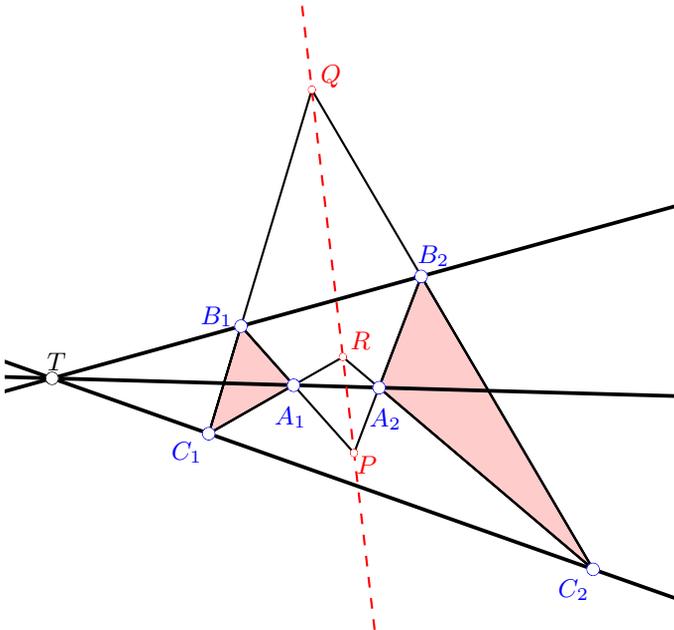
**Bemerkung:** Die Sätze von Ceva und Menelaos unterscheiden sich nur dadurch, ob eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Punkten aus  $D, E, F$  ausserhalb des Dreiecks  $\triangle ABC$  liegen: Falls kein Punkt oder zwei Punkte ausserhalb des Dreiecks  $\triangle ABC$  liegen, erhalten wir den **Satz von Ceva** (d.h.  $AD, BE, CF'$  sind kopunktal), andernfalls erhalten wir den **Satz von Menelaos** (d.h.  $D, E, F$  sind kollinear).

## Satz von Desargues

*Notation:* Für Geraden  $g$  und  $h$  bezeichnet  $g \wedge h$  den Schnittpunkt von  $g$  und  $h$ .

### Satz von Desargues 3.5

Gegeben seien zwei Dreiecke  $\triangle A_1B_1C_1$  und  $\triangle A_2B_2C_2$ , so dass sich  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$ ,  $C_1C_2$  in  $T$  schneiden.



Dann liegen die drei Punkte

$$P = A_1B_2 \wedge A_2B_2 \quad Q = B_1C_1 \wedge B_2C_2 \quad R = C_1A_1 \wedge C_2A_2$$

auf einer Geraden.

**Beweis:** Wir betrachten die drei Dreiecke  $\triangle C_1B_1T$ ,  $\triangle A_1TB_1$ ,  $\triangle TA_1C_1$ , und wenden dreimal den **Satz von Menelaos** an:

$$\text{TV}(C_1B_1Q) \cdot \text{TV}(B_1TB_2) \cdot \text{TV}(TC_1C_2) = -1$$

$$\text{TV}(A_1TA_2) \cdot \text{TV}(TB_1B_2) \cdot \text{TV}(B_1A_1P) = -1$$

$$\text{TV}(TA_1A_2) \cdot \text{TV}(A_1C_1R) \cdot \text{TV}(C_1TC_2) = -1$$

Da für drei kollineare Punkte  $T, S_1, S_2$  stets gilt  $\text{TV}(TS_1S_2) \cdot \text{TV}(S_1TS_2) = 1$ , erhalten wir als Produkt der drei Gleichungen:

$$\text{TV}(C_1B_1Q) \cdot \text{TV}(B_1A_1P) \cdot \text{TV}(A_1C_1R) = -1$$

Mit dem **Satz von Menelaos** liegen die drei Punkte  $P, Q, R$  also auf einer Geraden. **q.e.d.**

## Satz von Pappos

### Satz von Pappos 3.6

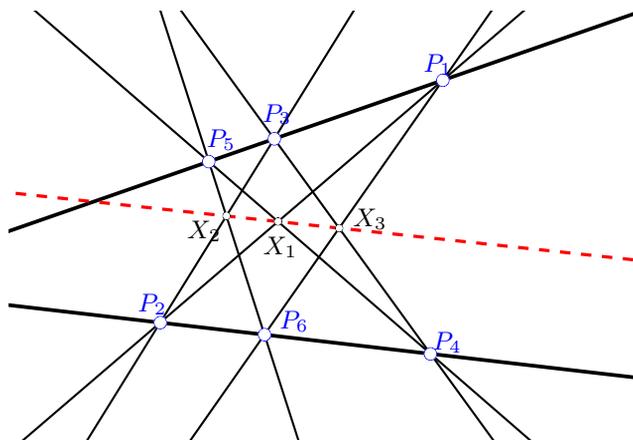
Gegeben seien zwei Geraden auf denen die Punkte  $P_1, P_3, P_5$  bzw.  $P_2, P_4, P_6$  liegen. Dann liegen die drei Punkte

$$X_1 = P_1P_2 \wedge P_4P_5$$

$$X_2 = P_2P_3 \wedge P_5P_6$$

$$X_3 = P_3P_4 \wedge P_6P_1$$

auf einer Geraden.

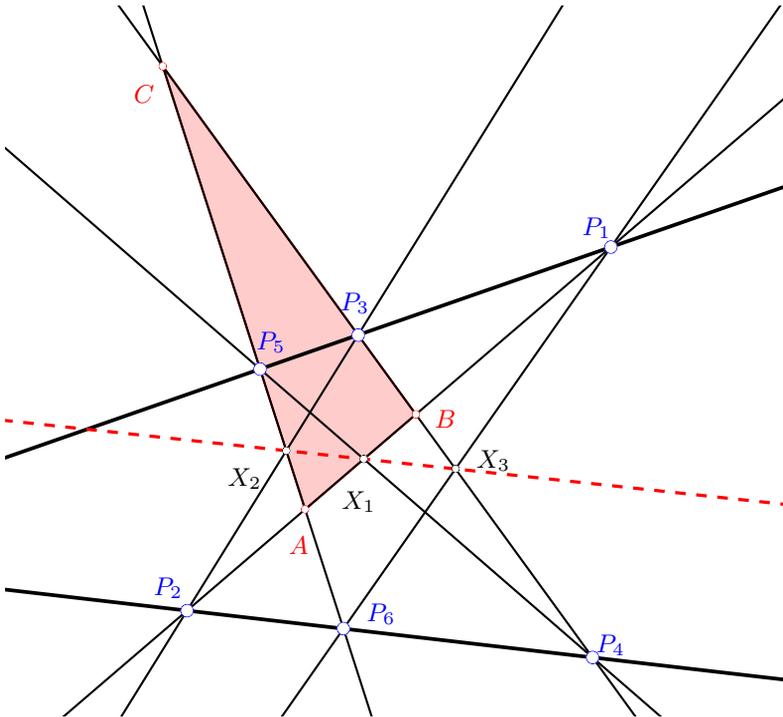


**Beweis:** Zuerst definieren wir drei Punkte  $A, B, C$ :

$$A = P_1P_2 \wedge P_5P_6$$

$$B = P_1P_2 \wedge P_3P_4$$

$$C = P_3P_4 \wedge P_5P_6$$



Nun betrachten wir das Dreieck  $\triangle ABC$  und wenden fünfmal den **Satz von Menelaos** an:

$$\text{TV}(ABX_1) \cdot \text{TV}(BCP_4) \cdot \text{TV}(CAP_5) = -1$$

$$\text{TV}(ABP_2) \cdot \text{TV}(BCP_3) \cdot \text{TV}(CAX_2) = -1$$

$$\text{TV}(ABP_1) \cdot \text{TV}(BCX_3) \cdot \text{TV}(CAP_6) = -1$$

$$\text{TV}(ABP_1) \cdot \text{TV}(BCP_3) \cdot \text{TV}(CAP_5) = -1$$

$$\text{TV}(ABP_2) \cdot \text{TV}(BCP_4) \cdot \text{TV}(CAP_6) = -1$$

Multiplizieren wir die ersten drei Gleichungen miteinander und dividieren das Produkt durch das Produkt der letzten beiden Gleichungen, so erhalten wir:

$$\text{TV}(ABX_1) \cdot \text{TV}(BCX_3) \cdot \text{TV}(CAX_2) = -1$$

Somit liegen mit dem **Satz von Menelaos** die drei Punkte  $X_1, X_2, X_3$  auf einer Geraden. **q.e.d.**

## Satz von Carnot

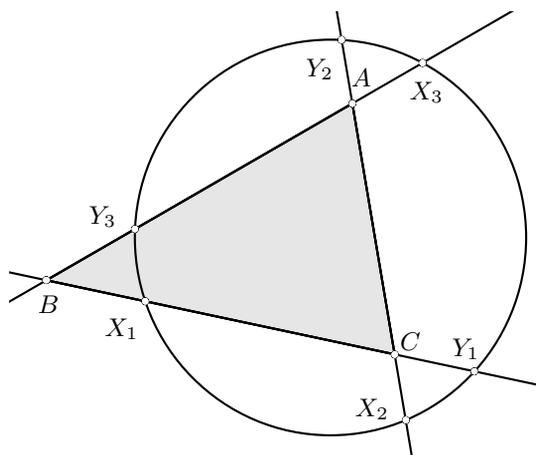
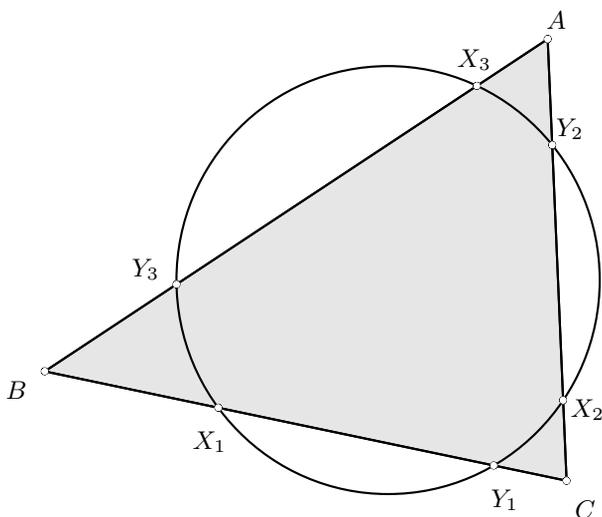
### Satz 3.7 (Satz von Carnot für Kreise)

Schneidet ein Kreis ein Dreieck  $\triangle ABC$  wie in den untenstehenden Figuren in den Punkten  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3$ , so gilt

$$\frac{\overline{AX_3}}{\overline{BX_3}} \cdot \frac{\overline{AY_3}}{\overline{BY_3}} \cdot \frac{\overline{BX_1}}{\overline{CX_1}} \cdot \frac{\overline{BY_1}}{\overline{CY_1}} \cdot \frac{\overline{CX_2}}{\overline{AX_2}} \cdot \frac{\overline{CY_2}}{\overline{AY_2}} = 1$$

oder mit Teilverhältnissen ausgedrückt:

$$\text{TV}(ABX_3) \cdot \text{TV}(ABY_3) \cdot \text{TV}(BCX_1) \cdot \text{TV}(BCY_1) \cdot \text{TV}(CAX_2) \cdot \text{TV}(CAY_2) = 1.$$



**Beweis:** Mit dem **Sekantensatz** bzw. dem **Sehnensatz** gilt

$$\begin{aligned}\overline{AX_3} \cdot \overline{AY_3} &= \overline{AY_2} \cdot \overline{AX_2}, \\ \overline{BX_1} \cdot \overline{BY_1} &= \overline{BY_3} \cdot \overline{BX_3}, \\ \overline{CX_2} \cdot \overline{CY_2} &= \overline{CY_1} \cdot \overline{CX_1},\end{aligned}$$

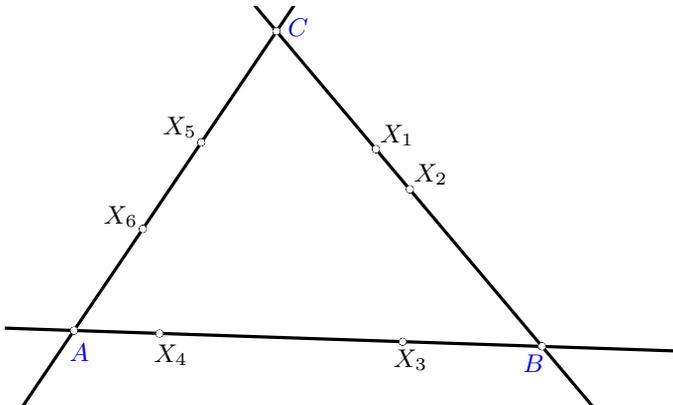
woraus direkt die obige Beziehung folgt.

**q.e.d.**

Wir betrachten nun das obige Produkt von Teilverhältnissen, welches wir *Carnot-Produkt* nennen wollen, etwas genauer und beweisen folgenden Hilfssatz.

**PQR-Lemma 3.8**

Gegeben seien 6 Punkte  $X_1, X_2, \dots, X_6$  von denen, wie in der Figur, je zwei auf einer Seite eines Dreiecks  $\triangle ABC$  liegen.

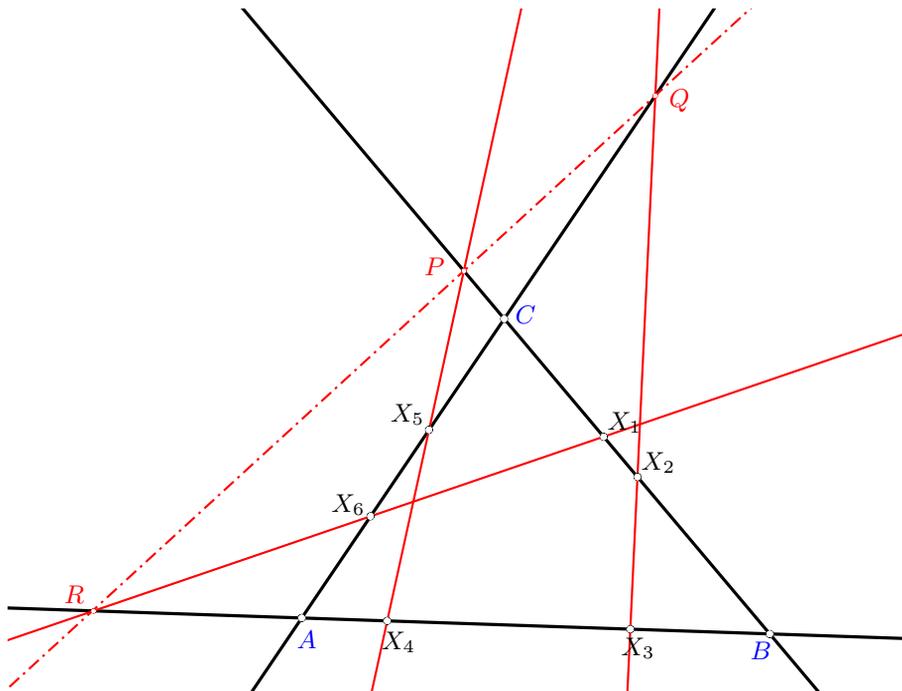


Weiter sei:

$$P = X_1X_2 \wedge X_4X_5 \quad Q = X_2X_3 \wedge X_5X_6 \quad R = X_3X_4 \wedge X_6X_1$$

Dann gilt:

$$PQR \text{ sind kollinear} \iff \text{“Carnot-Produkt”} = 1$$



**Beweis:** ( $\Leftarrow$ ) Mit dem **Satz von Menelaos** gilt:

$$\text{TV}(ABX_4) \cdot \text{TV}(BCP) \cdot \text{TV}(CAX_5) = -1$$

$$\text{TV}(ABX_3) \cdot \text{TV}(BCX_2) \cdot \text{TV}(CAQ) = -1$$

$$\text{TV}(ABR) \cdot \text{TV}(BCX_1) \cdot \text{TV}(CAX_6) = -1$$

Bilden wir das Produkt dieser drei Gleichungen und verwenden die Voraussetzung “*Carnot-Produkt*” = 1, so erhalten wir

$$\text{TV}(BCP) \cdot \text{TV}(CAQ) \cdot \text{TV}(ABR) = -1$$

und somit sind mit dem **Satz von Menelaos** die drei Punkte  $PQR$  kollinear.

( $\Rightarrow$ ) Sind umgekehrt die drei Punkte  $PQR$  kollinear, so gilt mit dem **Satz von Menelaos**  $\text{TV}(BCP) \cdot \text{TV}(CAQ) \cdot \text{TV}(ABR) = -1$ . Bilden wir wieder das Produkt der drei obigen Gleichungen, so folgt aus  $\text{TV}(BCP) \cdot \text{TV}(CAQ) \cdot \text{TV}(ABR) = -1$ , dass gilt

$$\text{TV}(ABX_3) \cdot \text{TV}(ABX_4) \cdot \text{TV}(BCX_1) \cdot \text{TV}(BCX_2) \cdot \text{TV}(CAX_5) \cdot \text{TV}(CAX_6) = 1,$$

d.h. “*Carnot-Produkt*” = 1.

**q.e.d.**

Aus **Korollar 3.3** folgt, dass das *Carnot-Produkt* projektiv invariant ist. Damit können wir nun den **Satz von Carnot für Kreise** auf allgemeine Kegelschnitte übertragen.

**Satz von Carnot 3.9**

Gegeben seien 6 Punkte  $X_1, X_2, \dots, X_6$  von denen je zwei auf einer Seite eines Dreiecks  $\triangle ABC$  liegen. Dann liegen diese 6 Punkte genau dann auf einem Kegelschnitt wenn

$$\text{TV}(ABX_3) \cdot \text{TV}(ABX_4) \cdot \text{TV}(BCX_1) \cdot \text{TV}(BCX_2) \cdot \text{TV}(CAX_5) \cdot \text{TV}(CAX_6) = 1.$$

Aus dem **PQR-Lemma** und dem **Satz von Carnot** folgt nun direkt der **Satz von Pascal**, wie wir nun sehen werden.

## Satz von Pascal

### Satz von Pascal 3.10

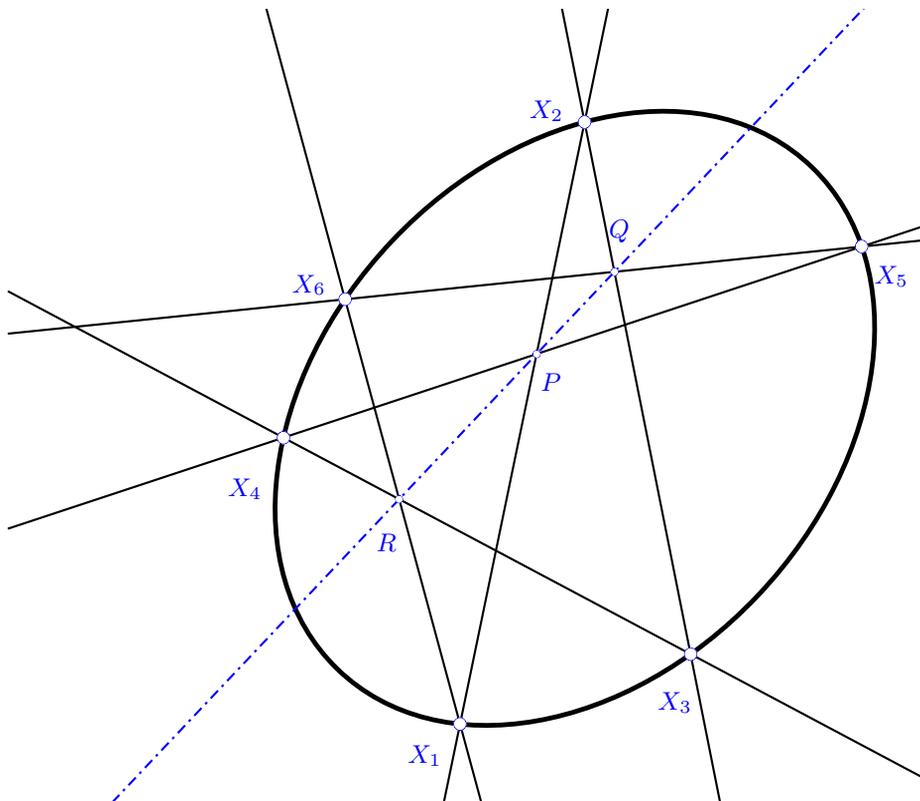
Sechs Punkte  $X_1, \dots, X_6$  liegen genau dann auf einem Kegelschnitt wenn die drei Punkte

$$P = X_1X_2 \wedge X_4X_5$$

$$Q = X_2X_3 \wedge X_5X_6$$

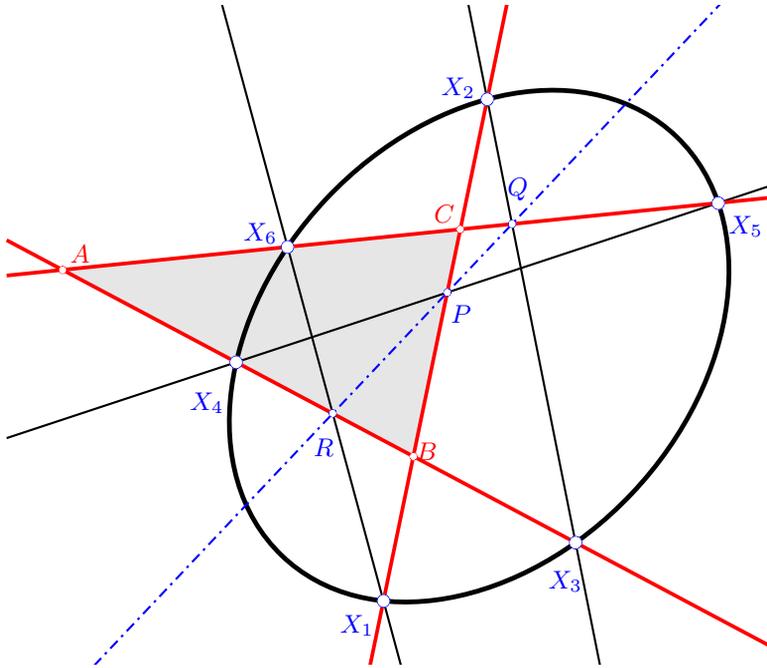
$$R = X_3X_4 \wedge X_6X_1$$

kollinear sind.



**Beweis:** Wir betrachten das Dreieck  $\triangle ABC$ , mit:

$$A = X_3X_4 \wedge X_5X_6 \quad B = X_1X_2 \wedge X_3X_4 \quad C = X_5X_6 \wedge X_1X_2$$



Mit dem **PQR-Lemma 3.8** erhalten wir, dass  $PQR$  genau dann kollinear sind, wenn gilt

$$TV(ABX_3) \cdot TV(ABX_4) \cdot TV(BCX_1) \cdot TV(BCX_2) \cdot TV(CAX_5) \cdot TV(CAX_6) = 1$$

was aber mit dem **Satz von Carnot 3.9** genau dann der Fall ist, wenn die 6 Punkte  $X_1, \dots, X_6$  auf einem Kegelschnitt liegen. **q.e.d.**

## Satz von Brianchon

Als duale Form des **Satzes von Pascal** erhalten wir den **Satz von Brianchon**, für dessen Formulierung wir die folgende Notation einführen: Für Punkte  $P$  und  $Q$  bezeichnet  $P-Q$  die Gerade durch  $P$  und  $Q$ .

**Satz von Brianchon 3.11**

Sechs Geraden  $g_1, \dots, g_6$  sind genau dann tangential an einen Kegelschnitt wenn die drei Geraden

$$(g_1 \wedge g_2) - (g_4 \wedge g_5)$$

$$(g_2 \wedge g_3) - (g_5 \wedge g_6)$$

$$(g_3 \wedge g_4) - (g_6 \wedge g_1)$$

kopunktal sind.

Vertauschen wir im **Satz von Brianchon** die Geraden  $g_3$  und  $g_5$ , so erhalten wir folgende, zum **Satz von Brianchon** äquivalente Aussage; die Ausführung überlassen wir der Leserin beziehungsweise dem Leser.

**Satz von Brianchon\* 3.12**

Sechs Geraden  $g_1, \dots, g_6$  sind genau dann tangential an einen Kegelschnitt wenn die drei Punkte

$$\left( (g_1 \wedge g_2) - (g_3 \wedge g_4) \right) \wedge \left( (g_4 \wedge g_5) - (g_6 \wedge g_1) \right)$$

$$g_2 \wedge g_5$$

$$g_3 \wedge g_6$$

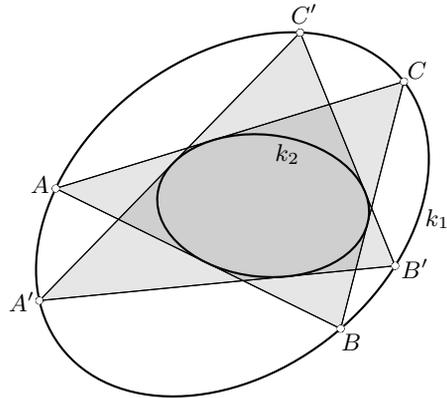
kollinear sind.

**Satz von Poncelet für Drei- und Vierecke**

Eines der tiefsten Resultate der projektiven Geometrie ist der Schließungssatz von Poncelet. Wir zeigen hier zwei Spezialfälle, deren Beweise sich nun leicht ergeben.

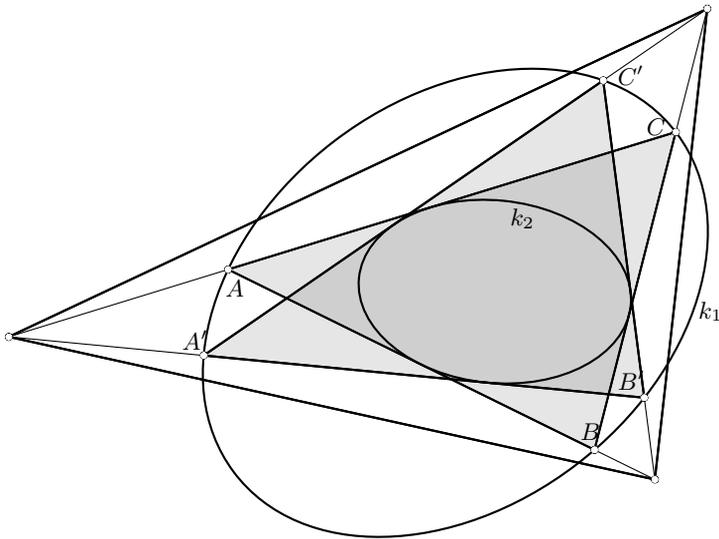
**Satz 3.13 (Satz von Poncelet für Dreiecke)**

Seien  $k_1, k_2$  Kegelschnitte und  $\triangle ABC$  ein Dreieck mit Ecken auf  $k_1$  und Seiten tangential an  $k_2$ . Sei  $\triangle A'B'C'$  ein weiteres Dreieck mit Ecken auf  $k_2$ , sodass zwei seiner Seiten tangential an  $k_1$  sind. Dann ist auch seine dritte Seite tangential an  $k_2$ .



Das bedeutet bildlich gesprochen, dass man das Dreieck  $\triangle ABC$  in  $k_1, k_2$  beliebig „drehen“ kann, wobei es immer seine Ecken auf  $k_1$  behält und seine Seiten tangential an  $k_2$  bleiben. Dabei ändert es freilich seine Form. Anders gesagt: Beginnt man in der obigen Figur bei einem beliebigen Punkt  $A'$  auf  $k_1$  und legt eine Tangente an  $k_2$ , welche  $k_1$  in einem Punkt  $B'$  schneidet, und setzt man diesen Prozess von  $B'$  aus fort, so landet man im dritten Schritt wieder bei  $A'$ .

**Beweis:**



Seien  $g_1, \dots, g_6$  die folgenden sechs Geraden:

$$g_1 = AC \quad g_2 = CB \quad g_3 = C'B' \quad g_4 = B'A' \quad g_5 = A'C' \quad g_6 = BA$$

Wir betrachten das Sehnensechseck  $B'CBAA'C'$  und definieren drei Punkte  $P, Q, R$  auf jeweils zwei verschiedene Arten:

$$P = \begin{cases} ((g_1 \wedge g_2) - (g_3 \wedge g_4)) \wedge ((g_4 \wedge g_5) - (g_6 \wedge g_1)) \\ CB' \wedge A'A \end{cases}$$

$$Q = \begin{cases} g_2 \wedge g_5 \\ CB \wedge A'C' \end{cases}$$

$$R = \begin{cases} g_3 \wedge g_6 \\ C'B' \wedge BA \end{cases}$$

Mit dem **Satz von Pascal 3.10** sind  $PQR$  kollinear und somit sind mit **Satz von Brianchon\* 3.12** die Geraden  $g_1, \dots, g_6$  tangential an einen Kegelschnitt. Weil nun mit dem **Satz von Brianchon 3.11** ein Kegelschnitt durch 5 Tangenten bestimmt ist, sind alle sechs Geraden (*d.h.* alle sechs Seiten der beiden Dreiecke) tangential an  $k_2$ .  
**q.e.d.**

Aus dem obigen Beweis folgt direkt

#### Korollar 3.14

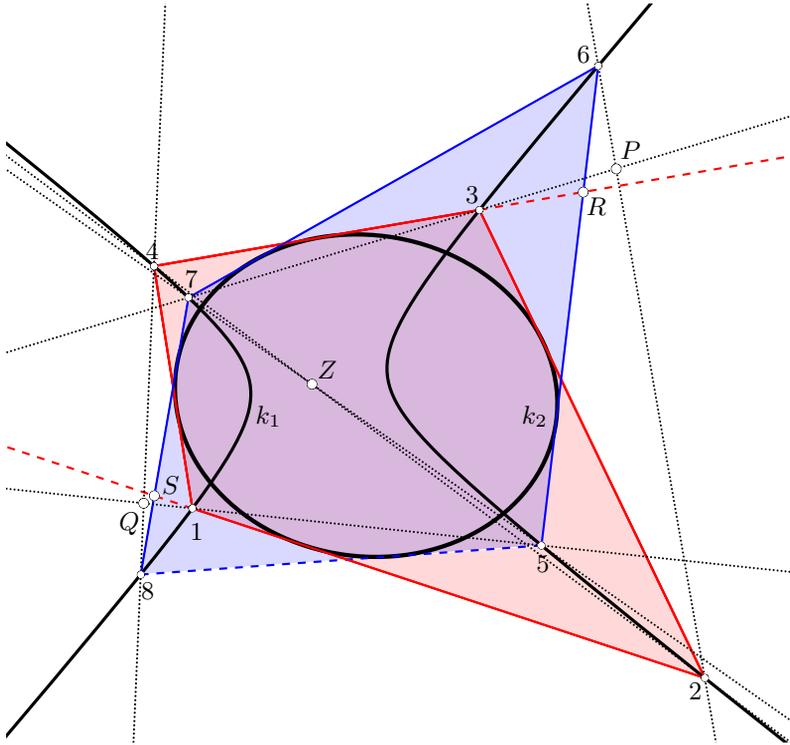
*Zeichnet man in einen Kegelschnitt zwei Dreiecke ein, die keine gemeinsame Ecke haben, so sind die 6 Seiten dieser Dreiecke tangential an einen Kegelschnitt.*

*Duale Version: Zeichnet man tangential an einen Kegelschnitt zwei Dreiecke, die keine gemeinsame Seite haben, so liegen die 6 Ecken dieser Dreiecke auf einem Kegelschnitt.*

#### Satz 3.15 (Satz von Poncelet für Vierecke)

Seien  $k_1, k_2$  Kegelschnitte und  $V$  ein Viereck mit Ecken auf  $k_1$  und Seiten tangential an  $k_2$ . Sei  $V'$  ein weiteres Viereck mit Ecken auf  $k_2$ , sodass drei seiner Seiten tangential an  $k_2$  sind. Dann ist auch die vierte Seite von  $V'$  tangential an  $k_2$ .

**Beweis:** Seien acht Punkte  $1, \dots, 8$  auf einem Kegelschnitt  $k_1$  gegeben. Die Geraden  $1-2, 2-3, 3-4, 4-1$  sowie  $5-6, 6-7, 7-8$  seien tangential an einen Kegelschnitt  $k_2$ . Zu zeigen ist, dass dann auch die Gerade  $8-5$  tangential an  $k_2$  ist.



Wir definieren folgende fünf Schnittpunkte von Geraden:

$$S = (1-2) \wedge (7-8)$$

$$P = (2-6) \wedge (3-7)$$

$$Q = (1-5) \wedge (4-8)$$

$$R = (5-6) \wedge (3-4)$$

$$Z = (2-4) \wedge (5-7)$$

Nun wenden wir zweimal den **Satz von Pascal 3.10** an, und zwar auf die folgenden zwei Sehnensechsecke:

$$\text{Sehnensechseck } 157842 \implies SZQ \text{ kollinear} \quad (P_1)$$

$$\text{Sehnensechseck } 375624 \implies PZR \text{ kollinear} \quad (P_2)$$

Im nächsten Schritt wenden wir den **Satz von Brianchon\* 3.12** an, und zwar auf das Tangentensechseck bestehend aus folgenden Geraden:

$$g_1 = 6-7 \quad g_2 = 5-6 \quad g_3 = 1-2 \quad g_4 = 2-3 \quad g_5 = 3-4 \quad g_6 = 7-8$$

Daraus folgt, dass die drei Punkte

$$\begin{aligned}
 P &: ((g_1 \wedge g_2) - (g_3 \wedge g_4)) \wedge ((g_4 \wedge g_5) - (g_6 \wedge g_1)) \\
 R &: g_2 \wedge g_5 \\
 S &: g_3 \wedge g_6
 \end{aligned}
 \tag{B_1^*}$$

kollinear sind. Mit  $(P_2)$  sind  $PRZ$  kollinear und mit  $(B_1^*)$  sind  $PRS$  kollinear, und damit sind auch  $PRSZ$  kollinear. Weil nun mit  $(P_1)$  auch  $SZQ$  kollinear sind, sind somit die fünf Punkte  $PRSZQ$  kollinear; insbesondere sind die drei Punkte  $QSR$  kollinear. Wenden wir den **Satz von Brianchon\*** 3.12 auf die sechs Geraden

$$h_1 = 1 - 4 \quad h_2 = 1 - 2 \quad h_3 = 5 - 6 \quad h_4 = 5 - 8 \quad h_5 = 7 - 8 \quad h_6 = 3 - 4$$

an, so folgt aus der Kollinearität der drei Punkte

$$\begin{aligned}
 P &: ((h_1 \wedge h_2) - (h_3 \wedge h_4)) \wedge ((h_4 \wedge h_5) - (h_6 \wedge h_1)) \\
 R &: h_2 \wedge h_5 \\
 S &: h_3 \wedge h_6
 \end{aligned}
 \tag{B_2^*}$$

dass die sechs Geraden  $h_1, \dots, h_6$  tangential an einen Kegelschnitt sind. Weil nun die fünf Tangenten  $h_1, h_2, h_3, h_5, h_6$  den Kegelschnitt  $k_2$  eindeutig bestimmen, ist auch  $h_4 = 5 - 8$  tangential an  $k_2$ . **q.e.d.**

Auf ähnliche Weise wie oben lässt sich nun auch der allgemeine **Satz von Poncelet** für beliebige  $n$ -Ecke beweisen (siehe Halbeisen und Hungerbühler [2]), d.h. der **Satz von Poncelet** ist im Wesentlichen nur eine kombinatorische Konsequenz des **Satzes von Pascal** 3.10. Als Ausblick, wie es weitergehen könnte, empfehlen wir der Leserin respektive dem Leser zum Beispiel die Artikel [3, 4], in denen gezeigt wird, wie der **Satz von Poncelet** auf mehrere Kegelschnitte verallgemeinert werden kann.

# Literaturverzeichnis

- [1] WERNER GREUB, *Lineare Algebra*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976.
- [2] LORENZ HALBEISEN UND NORBERT HUNGERBÜHLER, *A simple proof of Poncelet's theorem (on the occasion of its bicentennial)*, ***American Mathematical Monthly***, vol. 122 (2015), no. 6, 537–551.
- [3] ———, *Conjugate conics and closed chains of Poncelet polygons*, ***Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg***, vol. 36 (2016), 5–28.
- [4] ———, *Closed chains of conics carrying Poncelet triangles*, ***Beiträge zur Algebra und Geometrie / Contributions to Algebra and Geometry***, vol. 58 (2017), 277–302.
- [5] LORENZ HALBEISEN, NORBERT HUNGERBÜHLER UND JUAN LÄUCHLI, ***Mit harmonischen Verhältnissen zu Kegelschnitten***, *Perlen der klassischen Geometrie*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2016, 2016.