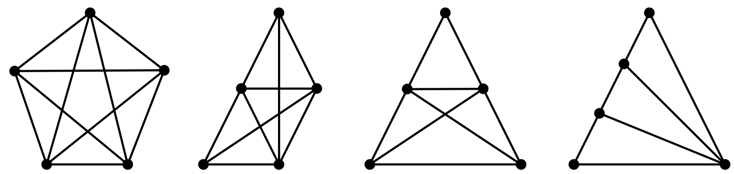
Lösung 2

4. Es gibt vier verschiedene Inzidenzgeometrien mit fünf Punkten, wobei nur die beiden mit fünf und sechs Geraden P erfüllen.

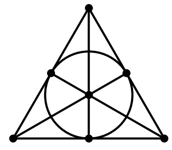


Eine Möglichkeit zu diesem Ergebnis zu kommen, ist, eine Fallunterscheidung nach der Existenz von Geraden mit einer bestimmten Anzahl Punkten durchzuführen. Z.B. ist die Geometrie ganz rechts die einzige Inzidenzgeometrie mit fünf Punkten, in der eine Gerade mit vier Punkten existiert, und die zweite Geometrie von rechts ist diejenige, in der es zwei verschiedene Geraden mit je drei Punkten gibt.

5. (a) P2. $\forall g_1 \forall g_2 \ \big(G(g_1) \wedge G(g_2) \wedge g_1 \neq g_2 \to \exists! P \ (I(P, g_1) \wedge I(P, g_2))\big)$
P3. $\forall g \ \big(G(g) \to \exists P_1 \exists P_2 \exists P_3 \ (P_1 \neq P_2 \wedge P_2 \neq P_3 \wedge P_3 \neq P_1 \wedge I(P_1, g) \wedge I(P_2, g) \wedge I(P_3, g))\big)$.

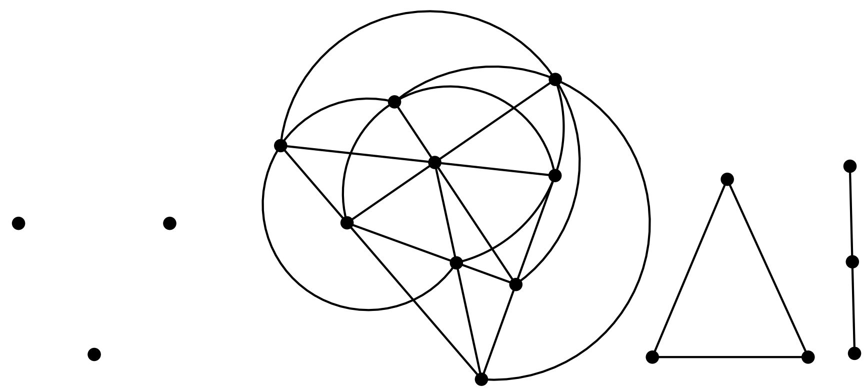
   (b) Wir geben eine Konstruktion an, die auch in den folgenden Teilaufgaben nützlich sein wird, und die am besten am Bild in der Lösung zu (c) verfolgt wird: Starte mit den drei Punkten aus P4, die nicht auf einer Geraden liegen. Wir wollen diese *Eckpunkte* nennen. Durch je zwei davon geht gemäss P1 eine Gerade. Diese Geraden sind verschieden, da die drei Eckpunkte nicht auf einer Geraden liegen. D.h. wir haben mindestens drei verschiedene Geraden. Auf jeder dieser Geraden liegt nach P3 ein zusätzlicher Punkt. Keine zwei dieser Punkte können übereinstimmen, sonst hätten zwei der Geraden zwei gemeinsame Punkte und wären somit identisch (P2). Nennen wir diese drei zusätzlichen Punkte *Seitenmittelpunkte*. Wir haben damit schon sechs Punkte. Den siebten Punkt erhalten wir als dritten Punkt (P3) auf einer Geraden durch einen der Eckpunkte und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt (P1). Mit analogen Argumenten wie zuvor sieht man, dass dieser Punkt nicht mit einem der zuvor konstruierten Punkte zusammenfallen kann.

   (c) Folgendes Bild beweist die Existenz:



Für die Eindeutigkeit verwendet man die Konstruktion aus (b). Damit man alle Axiome mit dem siebten Punkt erfüllen kann, muss er ein gemeinsamer Punkt aller drei Geraden durch je einen Eckpunkt und den gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt sein. Für eine Gerade, die zwei der Seitenmittelpunkte verbindet, kommt letztlich nur noch der abgebildete Kreis durch alle drei Seitenmittelpunkte in Frage.

(d) Im Folgenden sehen wir vier Geometrien, die von links nach rechts jeweils das Axiom P1, P2, P3 bzw. P4 verletzen, aber alle anderen erfüllen:



(e) P4 $\to$ P4': Siehe die Konstruktion in (b).

P4' $\to$ P4: Wir starten mit zwei verschiedenen Geraden. Dank P3 haben diese je mindestens drei Punkte. Wegen P1 kann höchstens einer dieser Punkte auf beiden Geraden liegen. Man erhält also P4 indem man auf der ersten Geraden zwei beliebige Punkte, und auf der zweiten Geraden einen beliebigen Punkt wählt, der nicht auf der ersten liegt.

(f) P3P4 $\to$ P34: Wähle in der Konstruktion in (b) zwei der Eckpunkte und diejenigen Seitenmittelpunkte, die nicht auf der Geraden zwischen den gewählten Eckpunkten liegen.

P34 $\to$ P4: Hier ist nichts zu zeigen.

P34 $\to$ P3: Nennen wir die vier Punkte aus P34 *Startpunkte*. Sei g eine beliebige Gerade. Sie kann nach P34 höchstens zwei der vier Startpunkte enthalten. Wir machen folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: Zwei der Startpunkte liegen auf g. Sei h die Gerade durch die anderen beiden Startpunkte (P1). Laut P2 schneiden sich die Geraden g und h in genau einem Punkt. Wegen P34 kann dieser Punkt keiner der vier Startpunkte sein, und wir haben einen dritten Punkte auf g gefunden.

Fall 2: Höchstens einer der Startpunkte liegt auf g. Wähle drei der Startpunkte, die nicht auf g liegen, und führe den Beginn der Konstruktion in (b) durch, um ein Dreieck mit den gewählten Punkten als Eckpunkten zu erhalten. Jede der drei Seitengeraden muss die Gerade g in genau einem Punkt schneiden (P1). Diese Punkte müssen verschieden sein, da sonst zwei der Seitengeraden zumindest zwei gemeinsame Punkte hätten und somit nach P2 identisch wären. Somit hat g mindestens drei Punkte.