D-MATH & D-PHYS | Geometrie | HS 2019

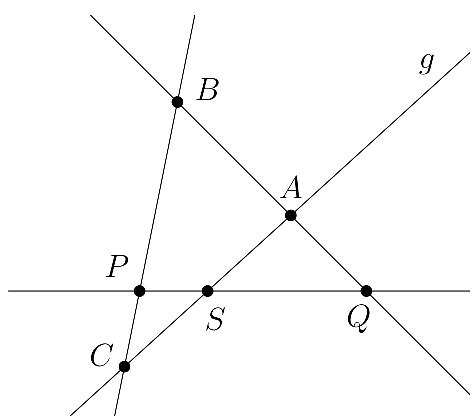
PD Dr. L. Halbeisen

Lösung 3

6. Aus $B(P, Q, R)$ folgt $Q \in \overline{PR}$. Laut dem Satz über die Separierung der Geraden können wir die Gerade schreiben als disjunkte Vereinigung von $\{Q\}$ und zwei Mengen s_P, s_R, bestehend aus allen Punkten auf der Geraden, die auf derselben Seite von Q liegen wie P bzw. R. Aus $B(Q, R, S)$ folgt mit B3 dass $Q \notin \overline{RS}$ und mit dem Satz $S \in s_R$. D.h. P und S liegen nicht auf derselben Seite von Q und somit gilt $B(P, Q, S)$. Analog kann man die Gerade bei R separieren und erhält $B(P, R, S)$.

7. In der folgenden Konstruktion sind alle Punkte und Geraden dank der Axiome B0 und I1 paarweise verschieden.

   Wähle mit I3 einen Punkt A, der nicht auf der Geraden durch P und Q liegt. Anwendung von B2 auf die Punkte Q und A ergibt einen Punkt B auf der Geraden durch Q und A mit $B(Q, A, B)$. Erneute Anwendung von B2 produziert einen Punkt C mit $B(B, P, C)$. Betrachte das Dreieck $\triangle BPQ$ und die Gerade g durch A und C. Diese Gerade schneidet die Seite $\overline{BQ}$ des Dreiecks (nämlich im Punkt A). Nach dem Axiom B4 von Pasch muss g genau eine weitere Seite des Dreiecks schneiden. Dies ist nicht $\overline{BP}$, da g die Gerade durch B und P im Punkt C schneidet, welcher nicht auf $\overline{BP}$ liegt. (Hier wird verwendet, dass g gemäss I1 die Gerade durch B und P in keinem anderen Punkt schneidet und dass wegen B3 nicht $B(B, P, C)$ und $B(B, C, P)$ gleichzeitig gelten können.) Somit schneidet g die Strecke $\overline{PQ}$, und dies ergibt den gesuchten Punkt S.



8. (a) Für $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$B(P, Q, R) :\Longleftrightarrow \; P \neq R \wedge \exists s \in (0, 1) \colon Q = (1 - s)P + sR.$$

   Dies drückt aus, dass Q eine strikte Konvexkombination von P und R ist, also auf der euklidischen Strecke zwischen P und R liegt. Dass die Axiome

B0, B1, B2, B3, B4 erfüllt sind, kann man anhand dieser Definition nun direkt nachprüfen.

(b) Als Vorüberlegung betrachten wir einen Punkt C und einen von C ausgehenden Strahl γ mit Richtungsvektor $v_\gamma = (x_\gamma, y_\gamma) \neq (0,0)$. Der Strahl besteht also aus allen Punkten $P_t = C + tv_\gamma$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, die jeweils von C den Abstand $d_1(C, P_t) = |tx_\gamma| + |ty_\gamma| = t(|x_\gamma| + |y_\gamma|)$ haben.

C1 Der Punkt D existiert und ist eindeutig bestimmt, nämlich $D = P_t$ mit $t = d_1(A,B)/(|x_\gamma| + |y_\gamma|)$.

C2 Folgt direkt aus der Definition der Kongruenzrelation.

C3 Es gelte $B(P,Q,R)$ und $B(U,V,W)$. Dann existieren $s_1, s_2 \in (0,1)$ mit $Q = (1-s_1)P + s_1R$ und $V = (1-s_2)U + s_2W$. Eine kurze Rechnung mit Koordinaten ergibt die Formeln $d_1(P,Q) = s_1 d_1(P,R)$ und $d_1(Q,R) = (1-s_1)d_1(P,R)$, also $d_1(P,R) = d_1(P,Q) + d_1(Q,R)$. Analog gilt $d_1(U,W) = d_1(U,V) + d_1(V,W)$. Die Kongruenzen $\overline{PQ} \cong \overline{UV}$ und $\overline{QR} \cong \overline{VW}$ übersetzen sich per Definition in $d_1(P,Q) = d_1(U,V)$ und $d_1(Q,R) = d_1(V,W)$. Wir schliessen

$$d_1(P,R) = d_1(P,Q) + d_1(Q,R) = d_1(U,V) + d_1(V,W) = d_1(U,W),$$

also $\overline{PR} \cong \overline{UW}$.

Der Einheitskreis bzgl. d_1 ist das Quadrat mit Ecken $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ und $(0,-1)$.

(c) Hier ist der Abstand der Punkte P_t auf dem Strahl zu C gegeben durch $d_\infty(C,P_t) = t\max\{|x_\gamma|, |y_\gamma|\}$. Die Argumente in (b) lassen sich nun eins zu eins übertragen. Der Einheitskreis bzgl. d_∞ ist das Quadrat mit Ecken $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$ und $(1,-1)$.

(d) Wir betrachten folgenden **Satz:** *Sei g eine Gerade, A,B,C drei Punkte auf g und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Gilt $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC}$, so stimmen (mindestens) zwei Punkte von A,B,C überein.*

Dieser Satz ist wahr im euklidischen Modell: Die Bedingung $\overline{PA} \cong \overline{PB} \cong \overline{PC}$ bedeutet, dass $d_2(P,A) = d_2(P,B) = d_2(P,C)$, und Punkte, die von P einen vorgegebenen Abstand haben, liegen auf einem Kreis um P. Sollen sie gleichzeitig alle auf einer Geraden liegen, liegen sie auf der Schnittmenge eines Kreises mit einer Geraden. Eine solche Schnittmenge besteht aber aus maximal 2 Punkten.

Wir zeigen, dass der Satz nicht gilt in den Modellen aus (b) und (c), indem wir je ein Gegenbeispiel angeben. Als Punkt P wählen wir den Ursprung $(0,0)$, und als Gerade g wählen wir eine Gerade, die eine der Seiten des jeweiligen Einheitskreises enthält. Konkret können wir in (b) die Gerade $g\colon y = 1 - x$ und in (c) die Gerade $g\colon x = 1$ wählen. Dann haben alle Punkte auf der gewählten Seite des Einheitskreises den Abstand 1 von P und liegen auf derselben Geraden.

(e) Die Modelle aus (b) und (c) sind isomorph. Um dies einzusehen, betrachten wir die lineare Abbildung $f\colon (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$. Sie ist bijektiv und bildet Geraden auf Geraden ab. Des Weiteren ist sie eine *Isometrie*: Für zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^2$ gilt stets $d_\infty(f(P), f(Q)) = d_1(P, Q)$, wie aus der Gleichheit $|x| + |y| = \max\{|x + y|, |x - y|\}$ für reelle Zahlen x, y folgt. D.h. dass f auch die Kongruenzrelation erhält: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ im Modell aus (b) gilt genau dann, wenn $\overline{f(P)f(Q)} \cong \overline{f(R)f(S)}$ im Modell aus (c). Damit ist f ein Isomorphismus zwischen diesen beiden Modellen.