Lösung 4

9. (a) Sei $K(x) = \{A \in \mathbb{R}^2 \colon d(A,(x,0)) = 1\}$ der Einheitskreis mit Mittelpunkt $(x,0)$. Für $x = 0$ ist es der euklidische Einheitskreis. Für $|x| \geq 1$ gilt $K(x) = \{(x+1,0),(x-1,0)\}$. In allen anderen Fällen besteht $K(x)$ aus dem euklidischen Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $1-|x|$, wobei der Punkt $(\operatorname{sgn}(x)(1-|x|),0)$ entfernt und der Punkt $(\operatorname{sgn}(x)(1+|x|),0)$ hinzugefügt wird. In Formeln: $K(x) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{a^2+b^2} = 1-|x|, |a| \neq 1-|x|\} \cup \{(x \pm 1, 0)\}$.

   (b) Seien $A = (0,0)$ und $B = C = (1,0)$. Als Strahl betrachten wir die Menge $\gamma = \{(1,y) \colon y \geq 0\}$. Dann gilt $d(A,B) = 1$ aber $\inf_{D \in \gamma \setminus \{C\}} d(C,D) = 2$. Also gibt es auf γ keinen Punkt D mit $\overline{CD} \cong \overline{AB}$.

   (c) Seien $A = (0,0)$ die Ecke im Ursprung und B,C die beiden weiteren Eckpunkte. Falls A auf der Geraden durch B und C liegt, ist die Länge der längsten Seite gleich der Summe der beiden Kürzeren (zudem ist $\triangle ABC$ in diesem Fall ein degeneriertes Dreieck). Sonst gilt $d(B,C) = d(A,B) + d(A,C)$, sodass das Dreieck nicht gleichseitig sein kann.

   (d) Sei $K = \{P \in \mathbb{R}^2 \colon d(P,0) = \frac{1}{2}\}$ der Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$ um den Ursprung. Jedes Tripel aus drei verschiedenen Punkten aus K definiert ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1. Wir zeigen nun, dass dies die einzigen solchen Dreiecke sind. Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges gleichseitiges Dreieck. Dann können keine zwei Eckpunkte auf einem Strahl mit Ursprung $(0,0)$ liegen (sonst wäre die Distanz zwischen diesen beiden Punkten echt kleiner als eine der anderen Seitenlängen). Somit gelten im Fall der Seitenlänge 1 die Gleichungen $\|A\| + \|B\| = \|B\| + \|C\| = \|A\| + \|C\| = 1$, woraus $A,B,C \in K$ folgt.

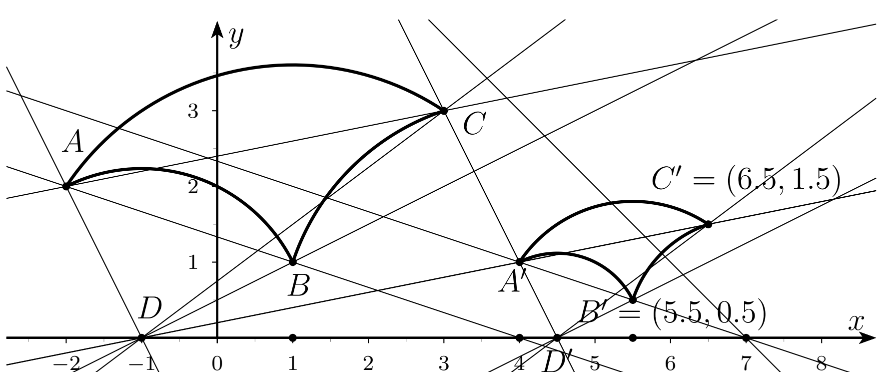
10. $\mathsf{C4}$, $\mathsf{C5}$: Das gegebene Modell unterscheidet sich vom euklidischen Modell nur in der Kongruenzrelation für Strecken, welche in $\mathsf{C4}$ und $\mathsf{C5}$ nicht vorkommt. Es reicht also, diese beiden Axiome im euklidischen Modell zu überprüfen. Dort korrespondieren Äquivalenzklassen von Winkeln zu den Zahlen im Intervall $(0,\pi)$, vermöge der Winkelgrösse in Radianten. Dann ist klar, dass $\mathsf{C5}$ erfüllt ist, und $\mathsf{C4}$ erhalten wir durch Abtragen einer gegebenen Winkelgrösse auf einer vorgegebenen Seite eines Strahls.

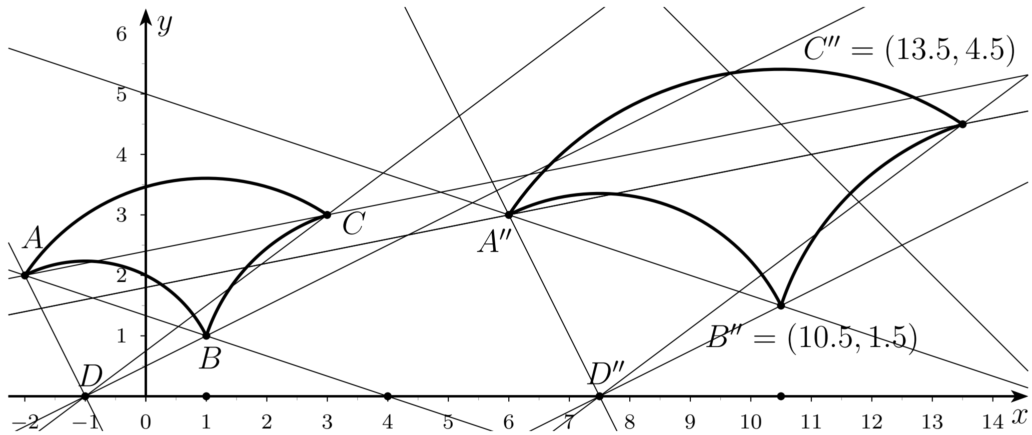
    $\mathsf{C6}$: Das Dreieck $\triangle ABC$ mit $A = (0,0), B = (2,0), C = (1,1)$ ist gleichseitig, seine Innenwinkel stimmen jedoch nicht alle überein. Wäre $\mathsf{C6}$ erfüllt, so wäre dies ein Widerspruch zu Satz 3.1 aus der Vorlesung.

11. Die Idee ist, auf das gegebene hyperbolische Dreieck eine Transformation T anzuwenden, die die hyperbolische Distanz und Winkel erhält, und den Eckpunkt A

auf A' bzw. A'' abbildet. (Hierbei bedeutet Erhalten der hyperbolischen Distanz, dass $d(T(P),T(Q)) = d(P,Q)$ für alle Punkte P,Q gilt.) Um dies durchführen zu können, müssen wir einen ausreichend grossen Vorrat an solchen Transformationen zur Verfügung haben. Aufgrund der Definition der hyperbolischen Distanz d erfüllen horizontale Translationen $T\colon P \mapsto P + (\alpha, 0)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ sicherlich die Anforderungen. Wir behaupten, dass d auch unter zentrischen Streckungen mit Zentrum auf der x-Achse invariant ist, also unter Abbildungen der Form $T\colon P \mapsto r(P - Z) + Z$, wobei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ der Streckungsfaktor und $Z = (z, 0)$ ein Zentrum auf der x-Achse ist. Da wir uns von der Invarianz unter horizontalen Translationen schon überzeugt haben, reicht es den Fall $Z = (0,0)$ zu betrachten. Für diesen ist die Aussage aber klar, da dann T einfach die Skalierung mit dem positiven Faktor r ist, sodass bei Anwendung von T alle in der Definition von d auftretenden Grössen mit demselben Faktor skaliert werden und dieser jeweils gekürzt werden kann. Da des Weiteren A durch Komposition einer solchen Streckung mit einer horizontalen Translation auf jeden anderen Punkt der hyperbolischen Ebene abgebildet werden kann, haben wir damit genügend geeignete Transformationen gefunden.

Als nächstes müssen wir das Dreieck $\triangle ABC$ zeichnen. Am einfachsten geschieht dies durch Konstruktion der Mittelsenkrechten auf die euklidischen Strecken zwischen den Ecken. Der Schnittpunkt mit der x-Achse ist dann der jeweilige Mittelpunkt der hyperbolischen Geraden, auf welcher die entsprechende Seite liegt. Bezeichnen wir den Mittelpunkt für die Seite AB mit D. Wir können die Aufgabe nun lösen, indem wir das Dreieck $\triangle ABC$ mit Zentrum D strecken, so dass A auf derselben Höhe wie A' bzw. A'' landet, und dann geeignet horizontal verschieben. Dies müssen wir nun durch eine Konstruktion bewerkstelligen. Wir erklären eine mögliche Vorgehensweise am Beispiel von A'. Die Bemerkung ist, dass beim zu realisierenden Vorgehen die euklidischen Geraden durch je zwei der Punkte A, B, C, D auf parallele euklidische Geraden durch die entsprechenden Punkte im neuen Dreieck $\triangle A'B'C'$ abgebildet werden. Eine Parallele zu AD durch A' geschnitten mit der x-Achse ergibt also D', und Schneiden der Parallele zu AB durch A' mit der Parallelen zu DB durch D' ergibt B'. Den Punkt C' konstruiert man letztlich analog. (Mit dieser Konstruktion bekommen wir jeweils ein kongruentes Dreieck; im Allgemeinen gibt es natürlich mehr kongruente Dreiecke, wenn wie in dieser Aufgabe nur ein Eckpunkt vorgegeben ist.)





12. (a) Wir führen $M \neq M'$ zu einem Widerspruch. Betrachte die Gerade g durch M und M'. Da g durch M geht, schneidet g den Kreis k in zwei Punkten C und D, wobei gilt $B(C, M, D)$, sowie $\overline{MC} = \overline{MD}$. Mit $k = k'$ folgt analog, dass $\overline{M'C} = \overline{M'D}$ sowie $B(C, M', D)$. Es kann nicht $B(M, C, M')$ gelten, da sonst mit Aufgabe 6 im Widerspruch zu B3 auch $B(M, C, D)$ folgen würde. Analog kann nicht $B(M, D, M')$ gelten. Aufgrund von B3 gilt entweder $B(C, M, M')$ oder $B(M, M', C)$, sowie entweder $B(D, M, M')$ oder $B(M, M', D)$. Dabei sind die jeweils ersten Optionen nicht miteinander kompatibel, da sonst C und D auf derselben Seite von M liegen würden, woraus mit C1 folgen würde, dass $C = D$. Genauso sind die jeweils zweiten Optionen nicht kompatibel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall $B(C, M, M')$ und $B(M, M', D)$. (Ansonsten vertausche die Rollen von C und D.) Wir erhalten $\overline{CM} < \overline{CM'} = \overline{M'D} < \overline{MD}$. Dies steht im Widerspruch zu $\overline{MC} = \overline{MD}$.

(b) Da $P' \in k$, gilt $\overline{MP} = \overline{MP'}$. In (a) haben wir bewiesen, dass $M = M'$, sodass auch $\overline{MP'} = \overline{M'P'}$ gilt. Zusammen folgt die Aussage.