Lösung 5

13. (a) I1: Seien $P = (x_P, y_P)$ und $Q = (x_Q, y_Q)$ zwei verschiedene Punkte. Wir nehmen an, dass $x_P \neq x_Q$ ist; der Fall $y_P \neq y_Q$ funktioniert analog. Wir müssen zeigen, dass es genau eine Gerade $g_{a,b,c}\colon ax+by+c=0$ gibt, auf der sowohl P als auch Q liegen. Einsetzen der Koordinaten der beiden Punkte in die Geradengleichung ergibt jeweils eine Gleichung in a, b und c. Zuerst analysieren wir die Differenz der beiden Gleichungen:

$$a(x_P - x_Q) + b(y_P - y_Q) = 0 \iff \frac{a}{b} = \frac{y_Q - y_P}{x_P - x_Q} \quad \text{(oder } a = b = 0\text{)}.$$

Die Werte von a und b sind also bis auf skalare Vielfache eindeutig durch das Verhältnis $\frac{y_Q - y_P}{x_P - x_Q}$ bestimmt. Einsetzen zweier solcher Werte $(a, b) \neq (0, 0)$ in $ax_P + by_P + c = 0$ ergibt einen eindeutigen Wert für c. Dabei ist der c-Wert für Vielfache ka, kb ($k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) das entsprechende Vielfache kc. Da $g_{a,b,c} = g_{ka,kb,kc}$ ist, haben wir also eine eindeutige Gerade durch P, Q gefunden.

I2: Sind a, b, c alle von 0 verschieden, so liegen die Punkte $(0, -\frac{c}{b})$ sowie $(-\frac{c}{a}, 0)$ auf $g_{a,b,c}$ und diese sind verschieden. Ist $a = 0$, ersetzt man den zweiten Punkt durch $(1, -\frac{c}{b})$, falls $b = 0$ den ersten durch $(-\frac{c}{a}, 1)$, und falls $c = 0$ einen der beiden durch $(b, -a)$.

I3: Wir betrachen die Punkte $P = (0, 0)$, $Q = (0, 1)$ sowie $R = (1, 0)$ und behaupten, dass es keine Gerade gibt, die alle drei enthält. Falls doch, sei $g_{a,b,c}$ diese Gerade. Durch Einsetzen von P erhält man sofort $c = 0$, aus $Q \in g_{a,b,c}$ folgt $b = 0$, und dank R auch $a = 0$. Dann sind $a = b = 0$, und $g_{a,b,c}$ ist somit keine Gerade.

(b) Eine zu $g_{a,b,c}$ parallele Gerade muss von der Form g_{a,b,c_1} ($= g_{ka,kb,kc_1}$) für ein $c_1 \in \mathbb{R}$ sein. Einsetzen von P bestimmt den Parameter c_1 eindeutig und somit auch die Parallele durch P.

14. (a) In der Standardbasis lautet die Gleichung $k\colon (x-3)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$. Ein Vektor $(\tilde{x}, \tilde{y})$ in der neuen Basis entspricht dem Vektor $(3\tilde{x} + 3\tilde{y}, \tilde{x} - 5\tilde{y})$. Entsprechend hat die Kreisgleichung dann die Form $(3\tilde{x} + 3\tilde{y} - 3)^2 + (\tilde{x} - 5\tilde{y} + 2)^2 - 9 = 0$. Ausmultiplizieren, Zusammenfassen und Vereinfachen ergibt $5\tilde{x}^2 + 4\tilde{x}\tilde{y} + 17\tilde{y}^2 - 7\tilde{x} - 19\tilde{y} + 2 = 0$.

(b) Zuerst bemerken wir, dass die Gleichung $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 4 = 0$ und die Gleichung $(4\tilde{x})^2 + (4\tilde{y})^2 - 64 = 0$ dieselbe Punktmenge beschreiben. Unser Ziel ist daher, den Term $5x^2 - 6xy + 5y^2$ als Summe von zwei Quadraten $(ax+by)^2 + (cx+dy)^2$ zu schreiben; dann können wir $4\tilde{x} = ax + by$ und $4\tilde{y} = cx + dy$ setzen und erhalten daraus unsere neue Basis. Nach Ausmultiplizieren und

Koeffizientenvergleich suchen wir a, b, c, d mit $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 5$ und $ab+cd = -3$. Nach kurzem Durchprobieren von kleinen ganzzahligen Werten finden wir $a = b = 1$, $c = 2$, $d = -2$ als mögliche Wahl. Aus $4\tilde{x} = x + y$ und $4\tilde{y} = 2x - 2y$ erhalten wir $x = 2\tilde{x} + \tilde{y}$ und $y = 2\tilde{x} - \tilde{y}$. Die neue Basis (entsprechend den Koordinaten $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (1, 0)$ bzw. $(0, 1)$) ist also gegeben durch $\tilde{e}_1 = (2, 2)$, $\tilde{e}_2 = (1, -1)$.

15. (a)

$$\mathrm{DV}(ABXY) = \frac{5/6}{7/4} = \frac{10}{21}$$

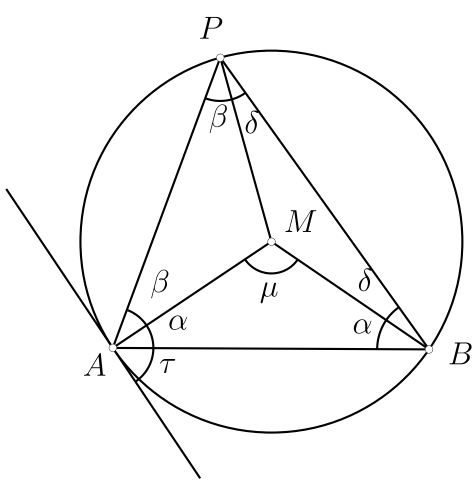
(b)

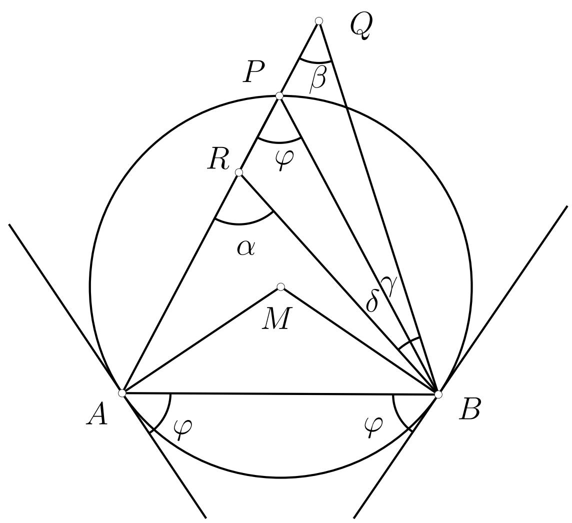
$$\mathrm{DV}(ABXY) = \frac{(\frac{7}{4} + \frac{3}{7})/(\frac{13}{3} - \frac{7}{4})}{-(\frac{17}{2} + \frac{3}{7})/(\frac{17}{2} - \frac{13}{3})} = -\frac{61}{155}$$

(c) Sei $\alpha = \|(3, -2)\|$. Dann folgt:

$$\mathrm{DV}(ABXY) = \frac{(2\alpha/7\alpha)}{(3\alpha/6\alpha)} = \frac{4}{7}$$

16. (a) In der Skizze sind drei gleichschenklige Dreiecke sichtbar und man kann folgende Formeln ablesen: $\varphi = \beta + \delta$, $\tau + \alpha = 90°$, $\mu = 180° - 2\alpha = 2\tau$. Aus $180° = 2\alpha + 2\beta + 2\delta$ folgt $\varphi = 90° - \alpha = \tau$ und damit die erste Aussage.





Für die Umkehrung zeichnen wir zuerst bei den Punkten A und B die Sehnentangentenwinkel ein und definieren den Schnittpunkt M der beiden Senkrechten auf die Tangenten als den Mittelpunkt des Kreises, der A und B enthält. Wir nehmen an, wir haben einen Punkt Q im Äusseren bzw. einen Punkt R im Inneren des Kreises gegeben. Dann legen wir eine Gerade durch diesen Punkt und A und bezeichnen mit P den zweiten Schnittpunkt mit dem Kreis (siehe Figur rechts). Dabei wissen wir aus dem ersten Teil, dass $\sphericalangle APB = \varphi$. Ebenso gilt $\beta = \varphi - \gamma$ bzw. $\alpha = \varphi + \delta$. Also ist $\alpha = \varphi$ genau dann wenn $\delta = 0°$ und $\beta = \varphi$ genau dann wenn $\gamma = 0°$, was gleichbedeutend ist mit $R = P$ bzw. $Q = P$.

(b) Aus der Invarianz von Streckenlängen und Winkelgrössen unter Rotationen und Translationen folgt, dass das Doppelverhältnis eines Geradenbüschels nur von den Winkeln zwischen den Geraden abhängt. Nach dem in (a) bewiesenen Peripheriewinkelsatz sind die Winkel zwischen den Geraden a, x, b, y und a', x', b', y' gleich, und daher auch die Doppelverhältnisse dieser Geradenbüschel.

17. Wir wählen einen zusätzlichen Punkt B und konstruieren das vollständige Vierseit mit den Ecken A', B, X, X', C, D wie in der folgenden Skizze. Die Punkte E und F seien die eingezeichneten Diagonalenschnittpunkte. Aus der Vorlesung ist dann bekannt, dass die Punkte E, X, F, X' harmonisch liegen. Ist Y der Schnittpunkt der Geraden AE und $A'F$, so bilden die (unten rot eingezeichneten) Geraden a durch A und Y, x durch X und Y, a' durch A' und Y und x' durch X' und Y also ein harmonisches Geradenbüschel.