Lösung 6

18. (a) Der Einheitskreis hat in projektiven (homogenisierten) Koordinaten X, Y, Z die Gleichung $K\colon X^2 + Y^2 = Z^2$. Sei $P = [x, y, z]$ ein Punkt in K. Dann gilt

$$T(P) = [x \cosh \alpha + z \sinh \alpha, y, x \sinh \alpha + z \cosh \alpha].$$

Unter Verwendung von $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ und $x^2 + y^2 = z^2$ sehen wir

$$\begin{aligned}
&(x \cosh \alpha + z \sinh \alpha)^2 + y^2 \\
&\qquad = x^2(1 + \sinh^2 \alpha) + 2xz \cosh \alpha \sinh \alpha + z^2(\cosh^2 \alpha - 1) + y^2 \\
&\qquad = x^2 \sinh^2 \alpha + 2xz \cosh \alpha \sinh \alpha + z^2 \cosh^2 \alpha \\
&\qquad = (x \sinh \alpha + z \cosh \alpha)^2,
\end{aligned}$$

was $T(P) \in K$ nachweist.

(b) In projektiven Koordinaten ist $Q = [2, 0, 1]$, also

$$T(Q) = [2 \cosh \alpha + \sinh \alpha, 0, 2 \sinh \alpha + \cosh \alpha].$$

Ein Punkt liegt auf der Ferngeraden, wenn die Z-Komponente verschwindet. Wir suchen also $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $2 \sinh \alpha + \cosh \alpha = 0$, was nach elementaren Umformungen äquivalent ist zu $3\mathrm{e}^{2\alpha} = 1$. Wir können also $\alpha = -\frac{\log 3}{2}$ wählen. Der Bildpunkt $T(Q)$ hat als Y- und Z-Koordinate den Wert 0, woraus direkt $T(Q) = [1, 0, 0]$ folgt. (Insbesondere müssen wir $2 \cosh \alpha + \sinh \alpha$ nicht explizit ausrechnen.)

19. Durch Einsetzen der ersten drei Bildpunkte als Spaltenvektoren erhalten wir eine Transformation, die die ersten drei Bedingungen erfüllt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da wir in der projektiven Ebene Punkte mit Skalaren $\neq 0$ multiplizieren können, ohne sie zu ändern, ist obige Transformation identisch mit

$$\begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & 4\gamma \\ -2\alpha & -5\beta & 3\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

für jede Wahl von $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$. Um die vierte Bedingung zu erfüllen, haben wir also das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta & 4\gamma \\ -2\alpha & -5\beta & 3\gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen (zum Beispiel mit Gauß). Dies ergibt $\alpha = -3$, $\beta = 2$ und $\gamma = 2$. Die gesuchte Transformationsmatrix lautet also

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ 6 & -10 & 6 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. (a) Homogenisieren ergibt $G\colon 2X - 3Y - 4Z = 0$ und $H\colon 4X - 6Y + 2Z = 0$.

    (b) Der Schnittpunkt zweier projektiven Geraden kann durch Bildung des Vektorprodukts der Koeffizienten ermittelt werden. Der Schnittpunkt von G und H ist also

    $$P = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

    (c) Wählen wir als neue Basis $(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \tilde{E}_3) = (E_1, E_3, P)$, wobei E_1, E_2, E_3 die Standardbasisvektoren bezeichnen, so hat der Schnittpunkt per Definition die geforderten Koordinaten. Die Basiswechselmatrix ist dann gegeben durch

    $$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

    (d) Die projektiven Geradengleichungen in den neuen Koordinaten $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ erhält man durch Einsetzen von $X = \tilde{X} + 3\tilde{Z}$, $Y = 2\tilde{Z}$ und $Z = \tilde{Y}$. Dies ergibt $G\colon 2\tilde{X} - 4\tilde{Y} = 0$ und $H\colon 4\tilde{X} + 2\tilde{Y} = 0$. In der affinen Ebene lauten die Geradengleichungen nach dem Basiswechsel also $g\colon 2\tilde{x} - 4\tilde{y} = 0$ und $h\colon 4\tilde{x} + 2\tilde{y} = 0$, und wir sehen, dass sich diese tatsächlich in $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$ schneiden.

21. (a) Durch Homogenisieren erhalten wir $YZ = aX^2$ als Gleichung der Parabel projektiven Koordinaten. Der Schnittpunkt mit der Ferngeraden $Z = 0$ ist $E_2 = [0, 1, 0]$. Wir wollen nun einen projektiven Basiswechsel durchführen, so dass danach der Schnittpunkt die Koordinaten $[0, 0, 1]$ hat und die Ferngerade durch $\tilde{Y} = 0$ gegeben ist. Nach Dehomogenisieren entspricht die $\tilde{x}$-Achse (= die affine Gerade $\tilde{y} = 0$) dann der Ferngeraden, und das Verhalten der Parabel $y = ax^2$ im Unendlichen entspricht dem Verhalten der erhaltenen Kurve in den neuen Koordinaten $\tilde{x}, \tilde{y}$ im Punkt $(0, 0)$ relativ zur $\tilde{x}$-Achse.

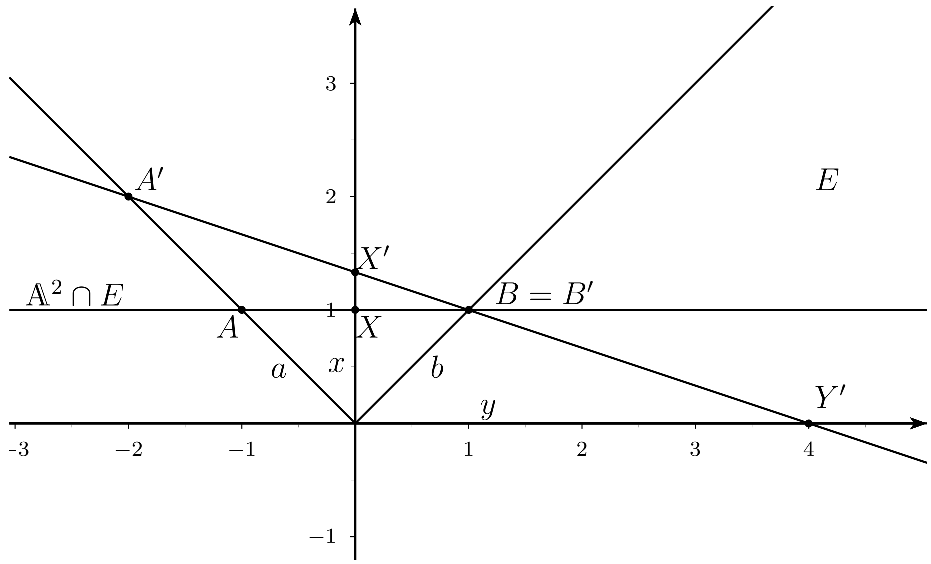
Ein solcher Basiswechsel ist nicht schwierig zu finden: Wir müssen einfach Y und Z vertauschen. Die neuen Koordinaten sind also $\tilde{X} = X$, $\tilde{Y} = Z$, $\tilde{Z} = Y$, und die projektive Parabelgleichung in diesen Koordinaten ist $\tilde{Y}\tilde{Z} = a\tilde{X}^2$. Dehomogenisieren (d.h. Einsetzen von $\tilde{Z} = 1$) ergibt $a\tilde{x}^2 = \tilde{y}$. Diese Kurve ist in $(0,0)$ tangential zur $\tilde{x}$-Achse, und wir schliessen, dass die Ausgangsparabel $y = ax^2$ tangential an die Ferngerade liegt, mit Berührpunkt im Fernpunkt $E_2 = [0,1,0]$.

(b) Wir müssen k in eine Parabel der Form $\tilde{y} = a\tilde{x}^2$ transformieren. In (a) haben wir gesehen, dass diese Parabeln die Ferngerade im Punkt $E_2 = [0,1,0]$ berühren. Es bietet sich also an zu versuchen, die Tangenten $y = -1$ und $y = 1$ an k in die Geraden $\tilde{y} = 0$ und die Ferngerade (= zwei Tangenten an $\tilde{y} = a\tilde{x}^2$) überzuführen. Wir suchen also einen projektiven Basiswechsel, der X nicht ändert, $[0,-1,1]$ auf $[0,0,1]$ und $[0,1,1]$ auf $[0,1,0]$ abbildet. Ein solcher ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

oder äquivalent durch $X = \tilde{X}$, $Y = \tilde{Y} - \tilde{Z}$, $Z = \tilde{Y} + \tilde{Z}$. Eingesetzt in der homogenisierten Kreisgleichung $K\colon X^2 + Y^2 = Z^2$ ergibt dies $\tilde{X}^2 + (\tilde{Y} - \tilde{Z})^2 = (\tilde{Y} + \tilde{Z})^2$, was nach Vereinfachen $\tilde{X}^2 = 4\tilde{Y}\tilde{Z}$ und nach Dehomogenisieren die Parabelgleichung $\tilde{x}^2 = 4\tilde{y}$ in $\mathbb{A}^2$ produziert.

22. (a) In projektiven Koordinaten ist $A = [-1,0,1]$, $B = [1,0,1]$, $X = [0,0,1]$. Diese Punkte in der projektiven Ebene können wir auffassen als Geraden a, b, x in der Ebene $E = \{(x_1, 0, x_3)\} \subset \mathbb{R}^3$, und ein vierter projektiver Punkt Y entspricht einer Geraden y in E, so dass das Geradenbüschel a, b, x, y harmonisch ist. Wie in der Vorlesung bewiesen können wir hierfür mit beliebigen kollinearen Punkten A', B', X', Y' auf a, b, x, y arbeiten. Wir wählen $A' = (-2,0,2), B' = (1,0,1), X' = (0,0,\frac{4}{3})$. Dann ist $\mathrm{TV}(A'B'X') = 2$, also muss damit die Punkte harmonisch liegen gelten: $2 = |\,\mathrm{TV}(A'B'Y')| = \overline{AY}/\overline{BY}$. Damit folgt $Y' = B' + \overrightarrow{A'B'} = (4,0,0)$, und der gesuchte projektive Punkt ist $Y = [4,0,0] = [1,0,0]$, welcher auf der Ferngeraden liegt.



(b) Projektive Transformationen sind geradentreu, also müssen $T(X)$ und $T(Y)$ auf der affinen Geraden g durch A, B, X liegen. Ausserdem erhalten sie Doppelverhältnisse, sodass $A, T(X), B, T(Y)$ notwendigerweise harmonisch liegen. Aufgrund der vorausgesetzten Invertierbarkeit von projektiven Transformationen können $T(X), T(Y)$ nicht mit einem der Punkte A, B zusammenfallen. Der Punkt $T(X)$ kann also a priori jeder Punkt $(s, 0)$ auf der Geraden g ausser A, B sein. Dann ist $T(Y)$ eindeutig bestimmt (als vierter harmonischer Punkt zu $A, T(X), B$). Für $s = 0$ ist $T(Y)$ ein Fernpunkt und somit nicht in $\mathbb{A}^2$, wie wir in (a) gesehen haben. Wir behaupten, dass dies die einzigen Einschränkungen sind, also dass für jedes $s \notin \{-1, 0, 1\}$ der Punkt $(s, 0)$ zusammen mit einem weiteren (nach dem obigen Argument eindeutig bestimmten) Punkt in $\mathbb{A}^2$ als Paar $(T(X), T(Y))$ auftreten kann. Hierfür konstruieren wir eine geeignete projektive Transformation T. Aus der Konstruktion werden wir auch die Koordinaten von $T(Y)$ erhalten.

Da die Y-Koordinate in unseren Betrachtungen keine Rolle spielt, können wir sie ohne Weiteres fixieren. Wir machen also den Ansatz

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Die Bedingungen $T(A) = A$ und $T(B) = B$ sind äquivalent zu

$$\begin{bmatrix} -a+b \\ 0 \\ -c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} a+b \\ 0 \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig ist. Auflösen nach a, b, c, d führt zu $a = d = \lambda + 1$ und $b = d = \lambda - 1$. Mit dieser Wahl von T ist $T(X) = [\lambda - 1, 0, \lambda + 1]$ und $T(Y) = [\lambda + 1, 0, \lambda - 1]$, also unter der Voraussetzung $T(X), T(Y) \in \mathbb{A}^2$

$(\Leftrightarrow \lambda \notin \{-1, 1\})$

$$T(X) = \left(\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}, 0\right) \text{ und } T(Y) = \left(\tfrac{\lambda+1}{\lambda-1}, 0\right).$$

Gegeben $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ gilt mit der Wahl $\lambda = \frac{1+s}{1-s} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ dann tatsächlich $T(X) = (s, 0)$, und die zugehörige Formel für $T(Y)$ ist $T(Y) = (s^{-1}, 0)$.