D-MATH & D-PHYS — Geometrie — HS 2019

PD Dr. L. Halbeisen

Lösung 7

23. Seien eine Tangente und Sekante gegeben wie in der Skizze. Aus dem Peripheriewinkelsatz (Aufgabe 16(a)) folgt, dass $\sphericalangle PBA_1 = \sphericalangle BA_2P$. Die beiden Dreiecke $\triangle PA_1B$ und $\triangle PBA_2$ sind daher ähnlich (der Winkel bei P ist identisch), und wir erhalten $\dfrac{\overline{PA_1}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA_2}}$ bzw. $\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} = \overline{PB}^2$.

    Für die Umkehrung lesen wir den Beweis von hinten nach vorne. Mit dem Verhältnis folgt, dass die Dreiecke ähnlich sind und die beiden Winkel gleich. Laut der Umkehrung des Peripheriewinkelsatzes müssen die drei Punkte dann auf einem Kreis liegen, zu dem t eine Tangente durch B ist.

24. Zeichnet man links und rechts jeweils eine Sekante ein, sind zwei Dreiecke $\triangle_1$, $\triangle_2$ sichtbar. Verbindet man die unteren zwei Punkte, weiss man dank dem Peripheriewinkelsatz, dass die beiden oberen Winkel der beiden Dreiecke gleich gross sind. Gleiches folgt analog für die unteren beiden Winkel. Die Winkel von $\triangle_1$ und $\triangle_2$ in P sind Wechselwinkel und somit identisch. Die Dreiecke sind also ähnlich, und es folgt $\frac{a}{a'} = \frac{b'}{b}$. Multiplizieren mit dem Hauptnenner ergibt die Aussage.

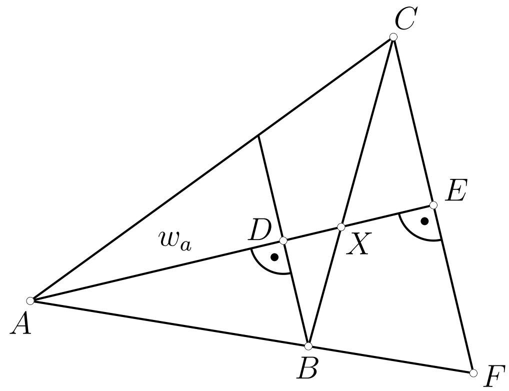
25. Wir beweisen zuerst die Aussage aus dem Hinweis, dass eine Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten teilt. Sei X der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_a durch A mit der Seite $\overline{BC}$. Wir definieren D als den Schnittpunkt von w_a mit der Senkrechten durch B auf w_a. Die Schnittpunkte der Senkrechten durch C auf w_a mit w_a bzw. der Geraden AB bezeichnen wir mit E und F. Aus Symmetriegründen gilt $\overline{CE} = \overline{EF}$ und $\overline{AC} = \overline{AF}$. Durch zweimalige Anwendung des 2. Strahlensatzes folgt

    $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} \overset{\text{Zentrum } A}{=} \frac{\overline{BD}}{\overline{FE}} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} \overset{\text{Zentrum } X}{=} \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}}.$$

    Setzen wir alles zusammen, so erhalten wir

    $$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}},$$

    insbesondere also $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BX}}{\overline{CX}}$.



Bezeichnen wir nun mit Y, Z die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden w_b, w_c mit den jeweiligen gegenüberliegenden Seiten und berechnen wir die drei vorkommenden Teilverhältnisse, so finden wir mit dem oben Bewiesenen

$$\begin{aligned}
\mathrm{TV}(BCX) &= \frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},\\
\mathrm{TV}(CAY) &= \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}},\\
\mathrm{TV}(ABZ) &= \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}.
\end{aligned}$$

Deren Produkt ist 1 und nach dem Satz von Ceva schneiden sich die drei Geraden w_a, w_b und w_c daher in einem Punkt.

26. Den unbeschrifteten Schnittpunkt der beiden durchgezogenen Geraden nennen wir A_3 und betrachten das Dreieck $\triangle A_1A_2A_3$. Die Schnittpunkte mit dem Kreis nennen wir im Gegenuhrzeigersinn X_1, X_2, X_3, X_5, X_4 und X_6. Der Satz von Carnot besagt dann

$$\begin{aligned}
&\mathrm{TV}(A_1A_2X_1)\cdot\mathrm{TV}(A_1A_2X_2)\cdot\mathrm{TV}(A_2A_3X_3)\\
&\cdot\mathrm{TV}(A_2A_3X_4)\cdot\mathrm{TV}(A_3A_1X_5)\cdot\mathrm{TV}(A_3A_1X_6) = 1.
\end{aligned}$$

Anschliessend betrachten wir die gestrichelte Gerade durch Y_1 und erhalten mit Menelaos

$$\mathrm{TV}(A_1A_2Y_1)\cdot\mathrm{TV}(A_2A_3X_3)\cdot\mathrm{TV}(A_3A_1X_6) = -1.$$

Noch einmal Menelaos mit der gestrichelten Geraden durch Y_2 liefert

$$\mathrm{TV}(A_1A_2Y_2)\cdot\mathrm{TV}(A_2A_3X_4)\cdot\mathrm{TV}(A_3A_1X_5) = -1.$$

Setzen wir die zweite und dritte Gleichung in die erste ein, folgt die zu zeigende Aussage $\mathrm{DV}(A_1A_2X_1Y_1)\cdot\mathrm{DV}(A_1A_2X_2Y_2) = 1$.

27. Wir nummerieren die gegebenen Punkte wie in der folgenden Skizze mit 1 bis 5 und konstruieren $P = (1-2) \wedge (4-5)$. Dann wählen wir fast beliebig einen zusätzlichen Punkt X und bilden die Schnittpunkte $R = (P-X) \wedge (3-4)$ und $Q = (P-X) \wedge (2-3)$. Aus dem Satz von Pascal für Kreise folgt dann, dass der Punkt $6 = (1-R) \wedge (5-Q)$ auch auf dem Kreis k liegt.