Serie 1

Ringe, Homomorphismen, Unterringe, Produkte

1. Zeige, dass in jedem Ring R die folgende Distributivregel gilt:
$$\forall x, y, z \in R : x(y - z) = xy - xz.$$

2. Zeige, dass ein Ringhomomorphismus $\psi : R \to S$ genau dann ein Isomorphismus ist, wenn er bijektiv ist.

3. Welche der Unterringe
$$\mathbb{Z}[i, \tfrac{1}{5}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{i}{25}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{4i}{5}], \quad \mathbb{Z}[\tfrac{4i}{5}, 4 + 3i]$$
von $\mathbb{C}$ sind gleich?

4. Zeige, dass jeder endlich erzeugte unitäre Unterring von $\mathbb{Q}$ die Form $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ für ein $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ hat. Folgere daraus, dass $\mathbb{Q}$ als Ring über $\mathbb{Z}$ nicht endlich erzeugt ist.

*5. Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]^\times \subset \mathbb{R}$ und zeige, dass sie unendlich ist.

6. Sei R ein Ring. Ein Element $e \in R$ mit $e^2 = e$ heisst *idempotent*. Zeige, dass die Zerlegungen von R in ein Produkt $S \times T$ von Ringen S und T eineindeutig den Darstellungen $1 = e + e'$ mit e und e' idempotent entsprechen.

7. Vereinfache die folgenden Ausdrücke im Polynomring $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ für jede natürliche Zahl d, wobei in der Summe jeweils $i, j, k \geqslant 0$ sind:
   (a) $(X - Y) \cdot \sum_{i+j=d} X^i Y^j$.
   (b) $(X - Y)(X - Z)(Y - Z) \cdot \sum_{i+j+k=d} X^i Y^j Z^k$.