

## Serie 10

### OPERATIONEN, SYMMETRISCHE GRUPPE

1. Eine Untergruppe  $H < G$ , welche unter allen Automorphismen von  $G$  in sich übergeht, heisst eine *charakteristische Untergruppe* von  $G$ .
  - (a) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Gruppe  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ .
  - (b) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Diedergruppe  $D_4$ .
  - (c) Bestimme alle charakteristischen Untergruppen der Quaternionengruppe  $Q$ .
2. Die multiplikative Gruppe  $\mathbb{R}^\times$  der reellen Zahlen operiert auf  $\mathbb{R}^2$  vermöge  $t(x, y) = (tx, y/t)$ . Bestimme die Bahnen und Stabilisatoren dieser Operation.
- \*\*3. In einem zweidimensionalen Universum  $\mathbb{R}^2$  sei im Ursprung eine Punktmasse (die Sonne) fixiert. Die Bewegung einer zweiten Punktmasse (eines Planeten) folge dem Newtonschen Gravitationsgesetz. Dies bedeutet eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bezüglich des Zeitparameters  $t$ .
  - (a) Für welche Anfangswerte  $(x_0, \dot{x}_0)$  existiert eine für alle  $t \in \mathbb{R}$  definierte Lösung  $(x(t), \dot{x}(t))$ ?
  - (b) Auf welchem Bereich in  $\mathbb{R}^4$  definiert die induzierte Abbildung  $(t, (x_0, \dot{x}_0)) \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$  eine Operation von  $(\mathbb{R}, +)$ ?
  - (c) Klassifiziere die Bahnen (!) und Stabilisatoren dieser Operation.
4. Jede Linksoption einer Gruppe  $G$  auf einer Menge  $X$  induziert eine Linksoption auf der Menge

$$\{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid \forall i \neq j: x_i \neq x_j\}$$

durch  $g(x_1, \dots, x_m) := (gx_1, \dots, gx_m)$ . Ist diese transitiv, so heisst die ursprüngliche Operation *m-fach transitiv*. Ist diese transitiv und frei, so heisst die ursprüngliche Operation *scharf m-fach transitiv*. Beispiel: Die natürliche Operation der symmetrischen Gruppe  $S_n$  auf  $\{1, \dots, n\}$  ist *m-fach transitiv* für jedes  $m \leq n$ , und *scharf n-fach transitiv*.

Sei jetzt  $K$  ein Körper und  $\mathbb{P}^1(K)$  die Menge aller eindimensionalen  $K$ -Untervektorräume von  $K^2$ . Die natürliche Operation von  $\mathrm{GL}_2(K)$  auf  $\mathbb{P}^1(K)$  faktorisiert durch eine Operation von  $\mathrm{PGL}_2(K) := \mathrm{GL}_2(K)/(K^\times \cdot I_2)$ . Zeige: Die Operation von  $\mathrm{PGL}_2(K)$  auf  $\mathbb{P}^1(K)$  ist *scharf dreifach transitiv*.

5. Sei  $G$  eine Gruppe und sei  $H < G$  eine Untergruppe von endlichem Index. Zeige, dass ein in  $H$  enthaltener Normalteiler  $N \triangleleft G$  von endlichem Index existiert.  
*Hinweis:* Finde einen Homomorphismus  $G \rightarrow S_n$ , dessen Kern in  $H$  enthalten ist.
6. Finde für alle  $n \geq 1$  einen injektiven Homomorphismus  $S_n \hookrightarrow A_{n+2}$ .
7. (a) Bestimme für jedes  $n$  das Zentrum der symmetrischen Gruppe  $S_n$ .  
 (b) Berechne den Zentralisator von  $(2\ 3\ 4)$  in  $S_5$ .  
 (c) Berechne den Zentralisator von  $(1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$  in  $S_7$ .
- \*8. (a) Für alle  $n$  und  $k$  bestimme die durchschnittliche Anzahl von Bahnen der Länge  $k$  eines Elements von  $S_n$ , wobei jedes Element von  $S_n$  als gleich wahrscheinlich betrachtet wird. Kontrolliere, dass das Resultat kompatibel mit der Gesamtzahl  $n$  der Ziffern ist.  
 (b) Bestimme die durchschnittliche Anzahl der Bahnen eines Elements von  $S_n$ , und deren asymptotisches Verhalten für  $n \rightarrow \infty$ .  
 (c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällige Elemente von  $S_n$  miteinander kommutieren, und deren asymptotisches Verhalten für  $n \rightarrow \infty$ . (Für letzteres Literatursuche.)