Serie 11

Symmetrische Gruppe, Einfache und Auflösbare Gruppen

1. Sei K ein endlicher Körper der Ordnung q. Betrachte die Operation von $\mathrm{PGL}_2(K)$ auf $\mathbb{P}^1(K)$ wie in Aufgabe 4 der Serie 10. Durch Numerieren der Elemente von $\mathbb{P}^1(K)$ entspricht diese einem Homomorphismus $\mathrm{PGL}_2(K) \to S_{q+1}$. Bestimme dessen Bild für alle $q \leqslant 4$.

2. Sei p eine Primzahl und sei $H < S_p$ eine Untergruppe, die einen p-Zykel und eine Transposition enthält. Zeige, dass $H = S_p$ gilt.

3. Beim *Schiebespiel* oder *15-Puzzle* sind in der Anfangsposition 15 nummerierte Steine in aufsteigender Reihenfolge in einem 4×4-Rahmen angeordnet, und das Feld unten rechts ist frei:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Ein Zug besteht darin, einen horizontal oder vertikal angrenzenden Stein auf das leere Feld zu schieben. Wir nennen eine Position *zulässig*, wenn sie mit einer endlichen Folge von Zügen aus der Anfangsposition erreicht werden kann und das leere Feld das Feld unten rechts ist.

Zeige, dass A_{15} die Gruppe der möglichen Permutationen der zulässigen Positionen ist. (In anderen Worten: Die Gruppe A_{15} operiert frei und transitiv auf der Menge der zulässigen Positionen.)

Folgere daraus, dass es keine Folge von Zügen gibt, welche die Position

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

in die Anfangsposition überführt.

*4. Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe, so dass der Index $p := [G : H]$ gleich dem kleinsten Primteiler der Ordnung von G ist. Zeige, dass H ein Normalteiler ist.

Hinweis: Untersuche Kern und Bild des Homomorphismus $G \to S_p$, welcher der Operation von G auf der Menge der Linksnebenklassen G/H entspricht.

*5. (a) Zeige, dass jede Untergruppe vom Index 5 von A_5 zu A_4 konjugiert ist.

(b) Folgere daraus, dass $\mathrm{Aut}(A_5) \cong S_5$ ist.

6. Die *absteigende Zentralreihe* einer Gruppe G ist induktiv definiert durch $G^{[0]} := G$ und

$$G^{[m+1]} := [G, G^{[m]}] := \big\langle \big\{ [g, g'] \mid g \in G,\ g' \in G^{[m]} \big\} \big\rangle.$$

Existiert ein m mit $G^{[m]} = 1$, so heisst G *nilpotent*.

(a) Zeige, dass jedes $G^{[m]}$ die höhere Kommutatorgruppe $G^{(m)}$ enthält.

(b) Folgere, dass jede nilpotente Gruppe auflösbar ist.

(c) Zeige, dass die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_n(K)$ mit allen Diagonaleinträgen 1 nilpotent ist.

(d) Zeige, dass die Untergruppe aller oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}_2(K)$ auflösbar, aber nicht nilpotent ist, wenn $|K| > 2$ ist.

(e) Zeige, dass jede Untergruppe und Faktorgruppe einer nilpotenten Gruppe auch nilpotent ist.

*7. Die *aufsteigende Zentralreihe* einer Gruppe G ist induktiv definiert durch $Z_0 := 1$ und

$$Z_{i+1} := \{ z \in G \mid \forall g \in G \colon [g, z] \in Z_i \}.$$

(a) Zeige, dass für alle $i \geqslant 0$ gilt $Z_i \lhd G$.

(b) Zeige, dass G genau dann nilpotent ist, wenn ein n existiert mit $Z_n = G$.