Serie 12

Semidirekte Produkte, p-Gruppen und Sylowsätze

1. Sei σ ein n-Zykel in S_n.
   (a) Bestimme den Zentralisator $\mathrm{Cent}_{S_n}(\langle\sigma\rangle)$.
   (b) Bestimme den Normalisator $\mathrm{Norm}_{S_n}(\langle\sigma\rangle)$ als semidirektes Produkt, mit Gruppenordnung und Struktur.

2. (a) Bestimme die Gruppenstruktur von $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$.
   (b) Bestimme die Isomorphieklassen aller Gruppen der Ordnung 16, welche ein semidirektes Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 8 mit einer Gruppe der Ordnung 2 sind.

3. Zeige, dass jede p-Gruppe nilpotent ist.

4. (a) Sei G eine p-Gruppe, die auf einer endlichen Menge X operiert, mit der Fixpunktmenge $X^G := \{x \in X \mid \forall g \in G\colon gx = x\}$. Zeige $|X| \equiv |X^G| \mod p$.
   (b) Sei K ein endlicher Körper der Ordnung p^m, und sei $G < \mathrm{GL}_n(K)$ eine p-Gruppe. Sei $U < \mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe aller oberen Dreiecksmatrizen mit Diagonaleinträgen 1. Zeige, dass ein $h \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert mit $hGh^{-1} < U$.

*5. Sei G eine Gruppe und P eine p-Sylowuntergruppe von G. Zeige für beliebige Untergruppen H von G:

$$\mathrm{Norm}_G(P) < H \implies H = \mathrm{Norm}_G(H).$$

6. (a) Zeige, dass jede endliche Gruppe G mit einer nicht-trivialen zyklischen 2-Sylowuntergruppe eine normale Untergruppe vom Index 2 hat.
   Hinweis: Betrachte G als Untergruppe von $S(G)$ nach dem Satz von Cayley und achte auf das Vorzeichen.
   (b) Folgere daraus, dass eine nicht abelsche endliche Gruppe der Ordnung $\equiv 2 \mod 4$ nicht einfach sein kann.

7. Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung 561 zyklisch ist.