D-MATH
Prof. Richard Pink

Algebra I

HS 2019

Serie 13

Sylowsätze und Gruppen kleiner endlicher Ordnung

1. (a) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^k m$ für eine Primzahl p und natürliche Zahlen k und m mit $p \nmid m$ und $m > 1$. Zeige: Falls ein Normalteiler $N \lhd G$ der Ordnung m existiert, so ist G ein semidirektes Produkt von nicht-trivialen Untergruppen.

   (b) Zeige, dass eine endliche abelsche Gruppe genau dann ein direktes Produkt von nicht-trivialen Untergruppen ist, wenn sie nicht zyklisch von Primpotenzordnung ist.

   (c) Bestimme alle Gruppen ungerader Ordnung < 60, die kein semidirektes Produkt von nicht-trivialen Untergruppen sind.

2. Sei p eine Primzahl.

   (a) Bestimme die Anzahl p-Sylowuntergruppen in S_p.

   (b) Folgere daraus den *Satz von Wilson*:

$$(p-1)! \equiv -1 \bmod (p).$$

3. Betrachte einen endlichen Körper K mit $q := p^m$ Elementen für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $m \geqslant 1$.

   (a) Finde eine p-Sylowuntergruppe P in $\mathrm{GL}_n(K)$ und bestimme ihre Ordnung.

   (b) Bestimme den Normalisator von P und seine Ordnung.

   (c) Folgere daraus und mit Aufgabe 4 der Serie 12 die Sylowsätze für $\mathrm{GL}_n(K)$ und die Primzahl p.

4. Bestimme für jeden Primteiler von $|\,\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_7)|$ eine Sylowuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_7)$.

*5. Zeige, dass jede Gruppe der Ordnung $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ eine normale Untergruppe der Ordnung 17 hat.

Hinweis: Finde eine 13-Sylowgruppe P und eine 17-Sylowgruppe Q von G mit $Q < \mathrm{Norm}_G(P)$ und untersuche dann $\mathrm{Norm}_G(Q)$.

**6. Zeige, dass die Ikosaedergruppe, das heisst die Gruppe aller Drehsymmetrien eines regelmässigen Ikosaeders, isomorph zu A_5 ist.