D-MATH | Algebra I | HS 2019
Prof. Richard Pink

Serie 14

Freie Gruppen, Erzeugende und Relationen

1. Untersuche, welche der folgenden durch Erzeugende und Relationen gegebenen Gruppen endlich sind, und mache für diese eine Liste aller Elemente.

   (a) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2,\ x^2 = y^3 \rangle$

   (b) $G = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = yxyx^5 = 1 \rangle$

   (c) $G = \langle x, y \mid x^3 = y^2 = 1 \rangle$

   *(d) $G = \langle x, y \mid xy^2 = y^3x,\ yx^2 = x^3y \rangle$

2. Für jede Gruppe G ist $G_{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ die maximale abelsche Faktorgruppe von G. Zeige, dass es für zwei Gruppen G_1 und G_2 einen natürlichen Isomorphismus

$$(G_1 * G_2)_{\mathrm{ab}} \cong (G_1)_{\mathrm{ab}} \times (G_2)_{\mathrm{ab}}$$

   gibt.

*3. Zeige, dass für jedes $n \geqslant 1$ eine Einbettung $F_n \hookrightarrow F_2$ existiert.

4. Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die *komplexe obere Halbebene* und betrachte die Abbildungsvorschrift

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), z\right) \mapsto \tfrac{az+b}{cz+d}.$$

   (a) Zeige, dass dies eine wohldefinierte Linksoperation ist.

   (b) Bestimme den Kern des zugehörigen Homomorphismus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{H})$.

   (c) Zeige, dass diese Operation transitiv ist.

   (d) Berechne den Stabilisator von $i \in \mathbb{H}$.